Lineare Algebra für Informatiker

Abgabe: ~~06~~ 13.07.2017

Adrian C. Hinrichs Matr.Nr. 367129
Georg C. Dorndorf Matr.Nr. 366511

#52	#53	Σ
8,5 / 12	5 / 8	13,5 / 20

N.T.

Lineare Algebra 367129

367129
366511

Aufgabe 5(1)

a) Gegeben: $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{F}_2\}$, $A \in K^{4\times 4}$ mit

4/6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Nach (6.50) heißt A genau dann Diagonalisierbar, wenn A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.
Seien $d_{i,i} \in K^\times$ für $i \in [1,4]$ gegeben. Nach (3.43)(b) ist A nun ähnlich zu einer Diagonalmatrix, wenn ein $P \in GL_4(K)$ existiert, so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{4,4} \end{pmatrix}$$

gilt. Sei $P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,4} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{4,1} & \cdots & p_{4,4} \end{pmatrix}$. Es ist

$$P^{-1}AP = P^{-1}A\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,4} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{4,1} & \cdots & p_{4,4} \end{pmatrix}$$

Das ganze Blabla kannst du dir in der Klausur sparen; Du brauchst bloß die Aufgabe zu lösen und dann schreiben, was du machst.

1. Fall: $K = \mathbb{F}_2$
Es gilt

$$P^{-1}AP = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,4} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{4,1} & \cdots & p_{4,4} \end{pmatrix}$$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,4} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{4,1} & \cdots & p_{4,4} \end{pmatrix}$$

$$\cancel{= P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & p_{2,1}+p_{4,1} & 0 \end{pmatrix}} \quad = P^{-1}\begin{pmatrix} p_{2,1}+p_{4,1} & \cdots & p_{2,4}+p_{4,4} \\ p_{2,1}+p_{4,1} & \cdots & p_{2,4}+p_{4,4} \\ p_{2,1}+p_{4,1} & \cdots & p_{2,4}+p_{4,4} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

So ist die Aufg. nicht gedacht. ⇝ schau dir die Lsg. aus dem Tutorium mal an!

$$\cancel{= P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \neq \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{4,4} \end{pmatrix} \forall d_{i,i} \in K^\times, i \in [1,4]$$

0

Somit ist A für $K = \mathbb{F}_2$ nicht diagonalisierbar. ✓ □

2. Fall $K = \mathbb{Q}$

Nach (6.50) ist A genau dann diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$, wenn eine Eigenbasis von $\mathbb{Q}^{4\times 1}$ bzgl. A existiert.

Bestimme dazu zunächst die Eigenwerte von A:

$$\chi_A = \det(X E_4 - A) = \det\left(X E_4 - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} x-2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & x-3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & x & -3 \\ 0 & 0 & 0 & x+4 \end{pmatrix} \right)$$

$$\overset{(5.13)}{=} \sum_{\ell \in [1,4]} (-1)^{\ell+4} A_{4,\ell} \operatorname{Minor}_{4,\ell}(A)$$

$$= \sum_{\ell \in [1,3]} (-1)^{\ell+4}\, 0 \operatorname{Minor}_{4,\ell}(A) + (-1)^{4+4} (x+4) \operatorname{Minor}_{4,4}(A)$$

Sei: $A' := \begin{pmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ 0 & x-3 & 2 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$

$$= \cancel{\sum}\; 0 + (x+4) \det(A')$$

$$\overset{(5.13)}{=} (x+4) \Big(\sum_{k \in [1,3]} (-1)^{k+3} A'_{1,\ell} \operatorname{Minor}_{1,\ell}(A') \Big)$$

$$= (x+4) \Big((-1)^4 (x-2) \det\begin{pmatrix} x-3 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} + \sum_{\ell \in [1,2]} (-1)^{3+\ell}\, 0 \operatorname{Minor}_{1,\ell}(A') \Big)$$

$$= (x+4) \Big((x-2) \cdot \big((x-3)x - (2\cdot(-1))\big) + 0 \Big)$$

3 schließende Klammern, sorry!

$$= (x+4)(x-2)(x^2 - 3x + 2)$$

$$= (x+4)(x-2)(x-2)(x-1)$$

$= (x+4)(x-2)^2(x-1)$ ✓ (1)

$\Rightarrow$ Eigenwerte von A sind $-4, 2, 2$ und 1,

musst du nicht doppelt aufführen.

Bestimme (Basen der) Eigenräume

$\operatorname{Eig}_{-4} = \operatorname{Sol}(A + 4E_4, 0)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\operatorname{add}_{1,3,1} \\ \operatorname{add}_{2,3,7\cdot(-1)} \\ \operatorname{mul}_{2,1/-30} \\ \operatorname{add}_{1,2,-6} \\ \operatorname{add}_{3,2,-4} \\ \operatorname{mul}_{1,1/6} \\ \operatorname{sw}_{2,3}}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eine Spalte, nochmal Sorry!

$\Rightarrow \operatorname{Sol}(A + 4E_4, 0) = \langle (3 \;\; 2 \;\; 22 \;\; -30)^{tr} \rangle$ ✓ (1)

$\operatorname{Eig}_2 = \operatorname{Sol}(A - 2E_4, 0)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\operatorname{add}_{2,1,1} \\ \operatorname{add}_{3,1,1} \\ \operatorname{add}_{3,2,-5} \\ \operatorname{add}_{4,2,6} \\ \operatorname{add}_{1,2,-2} \\ \operatorname{mul}_{1,-1}}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sol}(A + 2E_4, 0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

✓ (1)

$\operatorname{Eig}_1 = \operatorname{Sol}(A - 1E_4, 0)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\operatorname{sw}_{2,3} \\ \operatorname{add}_{3,2,-2} \\ \operatorname{add}_{4,3,-5/7} \\ \operatorname{mul}_{3,1/-7} \\ \operatorname{add}_{2,3,-3} \\ \operatorname{add}_{1,3,-3} \\ \operatorname{add}_{1,2,1}}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Schöne, richtige Pfeile. Super! :)

$$\Rightarrow \operatorname{Sol}(A - 1E_4, 0) = \left\langle \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

✓ (1)

(2)

Wieso? Begründung fehlt (-1)

Da A diagonalisierbar ist existiert eine Matrix $P \in GL_4(\mathbb{Q})$, so dass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt. P ist gegeben durch die ~~Vektoren~~ Eigenvektoren ~~der~~ mit

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 22 & 1 & 1 & 0 \\ -30 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/30 \\ 0 & -1 & 2 & 7/5 \\ 0 & 1 & -1 & -2/3 \\ 1 & -1 & 2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

0

(3)

Bestimme Eigenbasis von ~~B~~ $\mathbb{C}[X]_{<3}$ bzgl. φ:

Eine Eigenbasis kann aus den Basen der Lösungsräume ~~für alle Eigenvektoren~~ ~~werte a~~ ~~von~~ $Sol(A - aE_4\}, 0)$ für alle Eigenvektoren a.

$Sol(A-2E_4, 0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{add_{1,3,1},\ add_{1,2,1},\ mul_{2,-1/3},\ add_{1,2,1},\ mul_{1,-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow Sol(A-2E_4, 0)$

$= \cancel{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\rangle}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ +3 \end{pmatrix} \right\rangle$ (✓)

noch ①, denn du hast Rechnung und die korrekten Pfeile.

$Sol(A-iE_4, 0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -i+1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -i+1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{sw_{1,2},\ add_{2,1,(-1+i)},\ add_{3,1,-1},\ add_{3,2,(-1+i)},\ mul_{2,i^{-1}},\ add_{1,2,i}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow Sol(A-iE_4, 0)$

$= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ✓ ①

$Sol(A+iE_4, 0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i+1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & i+1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{sw_{1,2},\ add_{2,1,-(1+i)},\ add_{3,1,-1},\ add_{3,2,-(i+1)},\ mul_{2,(-i)^{-1}},\ add_{1,2,-i}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow Sol(A+iE_4, 0)$

$= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ✓ ①

Also ist ~~die~~ eine Eigenbasis von $\mathbb{C}[X]_{<3}$ bzgl. φ:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

↯ ⓪

das sind keine Elemente aus $\mathbb{C}[X]_{<3}$, sondern aus $\mathbb{C}^3$. :-(

367129, 366511

4,5/6

b) ~~Gegeben~~: $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$;

$\varphi: K[X]_{<3} \to K[X]_{<3}, f \mapsto f(-1) + f(0)X + f(1)X^2$;

Eine Basis $S = (1, X, X^2)$ von $K[X]_{<3}$

Darstellungsmatrix von φ ~~bzgl. $K[X]_{<3}$~~ bzgl. S.

$$M_{S,S}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

Charakteristisches Polynom von φ:

$$\chi_\varphi = \det(X E_n - M_{S,S}(\varphi)) = \det\left(\begin{pmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ 1 & X & 0 \\ 1 & 1 & X-1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (X-1)^2 X - 1 - X + X - 1 = (X-1)^2 X - 2$$
$$= (X^2 - 2X + 1)X - 2$$
$$= X^3 - 2X^2 + X - 2$$
$$= (X-2)X^2 + X - 2$$
$$= (X-2)(X^2+1)$$ ✓ 1

Eigenwerte: Für ~~eige~~ Einen Eigenwert a muss gelten $\chi_\varphi(a) = 0$, also:

~~1. Fall: K=R~~

$\chi_\varphi(X) \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow 0 = (X-2)(X^2+1)$

$\Leftrightarrow X = 2 \vee 0 = X^2 + 1$

$\Leftrightarrow X = 2 \vee -1 = X^2 \quad (I)$

Fall $K = \mathbb{R}$:

$(I) \Leftrightarrow X = 2 \vee \underbrace{\pm\sqrt{-1} = X}_{\text{Hat keine Lösung über } \mathbb{R}}$ ✓

weg 0,5

$\Rightarrow$ Der einzige Eigenwert ist 2. Da weniger Eigenwerte existieren, als die Basis von $\mathbb{R}[X]_{<3}$ Elemente hat (3) ist φ über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar. (✓)

und da die alg. Vielfachheit von EW 2 kleiner als 3 = $\dim \mathbb{R}[X]_{<3}$ ist

−0,5

Fall $K = \mathbb{C}$

$(I) \Rightarrow X = 2 \vee \pm\sqrt{-1} = X \Leftrightarrow X = 2 \vee i = X \vee -i = X$

$\Rightarrow$ Es existieren genau so viele Eigenwerte, wie die Basis Elemente hat (3), daher ist φ diagonalisierbar. (✓) s.o.

6

Lineare Algebra zum 13.07.2017 366511; 367129

Aufgabe 53 366511 5/8

(a) 2/2 Zu zeigen:

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $K^{\mathbb{N}_0}_{<n}$ stets ein σ-invarianter Untervektorraum von $K^{\mathbb{N}_0}$.

Beweis: Sei $x \in K^{\mathbb{N}_0}_{<n}$ gegeben durch

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $\sigma(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wieso ist der σ-invariant?

Für $\sigma(x)$ gilt nun offensichtlich $\sigma(X) \in K^{\mathbb{N}_0}_{<n-1} \subseteq K^{\mathbb{N}_0}_{<n}$. $\square$

(b) 3/3 Wir wählen eine Basis S von $K^{\mathbb{N}_0}_{<4}$ als die Standardbasis: // nach ②

$$S = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right)$$

Nun bestimmen wir

$$M_{S,S}\left(\sigma|_{K^{\mathbb{N}_0}_{<4}}^{K^{\mathbb{N}_0}_{<4}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := A$$

// ①

Wir bestimmen nun die Eigenwerte indem wir χ_A und dessen Nullstellen bestimmen.

Es ist

$$\chi_A = \det(XE_4 - A)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & \cancel{+}1 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix} \right)$$

Kästchensatz
$$= \det\left(\begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right)$$

$$= x^2 \cdot x^2 = x^4$$ ✓ // 1

Es gilt $x^4 = 0$ für $x = 0$. Wir erhalten also 0 als Eigenwert.

Wir bestimmen nun die Eigenräume mit (6.4):

$$\mathrm{Eig}_0(A) = \mathrm{Sol}(A \cdot 0 \cdot E_4), 0)$$

$$= \mathrm{Sol}(A, 0)$$

$$= \mathrm{Sol}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} K$$

Wir erhalten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} K$ als einzigen Eigenraum. ✓ // 1

(c) 0/3

Sei s die Basis von $K^{\mathbb{N}_0}_{<n}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$s = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Dann erhalten wir als Darstellungsmatrix

$$M_{s,s}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} := A$$

Nun ist das char Polynom von A geg. durch

$$\chi_A = \det(XE_n - A)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}\right) \overset{*}{=} x^n$$

* obere Dreiecksmatrix

2

Es gilt $x^n = 0$ gdw. $x = 0$.

Wir erhalten als einzigen Eigenwert 0. f

Wir bestimmen den Eigenraum mit (6.4)

$$\mathrm{Eig}_0(A) = \mathrm{Sol}(A - 0 \cdot E_n, 0)$$
$$= \mathrm{Sol}(A, 0)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} K$$

// 0, du hast leider die Aufg. nicht gelöst.