Lineare Algebra für Informatiker

Abgabe: 06.07.2017

Adrian C. Hinrichs Matr.Nr. 367129
Georg C. Dorndorf Matr.Nr. 366511

#46	#47	Σ
7 / 10	10 / 10	17 / 20

N.T.

36712 9
366511

Aufgabe 46 | Adrian

a) Seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ gegeben durch:

3/6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1^{1+1} & 0 & \cdots & & 0 \\ 2^{2+1} & 1^{1+2} & & & \\ 3^{3+1} & 2^{3+2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 4^{4+1} & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 5^{5+1} & 4^{5+2} & \cdots & \cdots & 1^{5+5} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2^{-\pi} & e^2 & e^{-1} & \pi^{\sqrt{3}} & 3e \\ e^{\pi/4} & -2 & 0 & 5 & 1 \\ -e & 0 & 0 & \sqrt{\pi} & \pi^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & \pi^3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \pi^{-3} \end{pmatrix}$$

Berechne det A mittels Leibniz-Formel: „geschickt" -1

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 4\cdot 1 + (-1)(-2)(0) - (0)(-2)(-1)$$

$$= 4 + 0 - 0$$

$$= 4$$ f

// 0

Berechne det B mittels Korollar (5.16), da B^{tr} eine obere Dreiecksmatrix ist. ~~gilt~~: Es gilt: ✓ // 1

$$\det B \overset{(5.4)}{=} \det B^{tr} \overset{(5.16)}{=} \prod_{j \in [1,5]} (B^{tr})_{j,j} = 1^{1+1} + 1^{2+2} + \ldots + 1^{5+5}$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 \cdot 1$$

$$= 1$$ ✓ // 1

Berechne det C mittels Kästchensatz (#) ✓ // 1

Sei: $C' \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ gegeben, so dass $C \xrightarrow{sw_{1,2} \circ sw_{2,1}} C'$

Mit Korollar (5.6)(a) gilt nun

$$\det C = -(-\det C') = \det C' \overset{\#}{=} \det \begin{pmatrix} -e & 0 & 0 & \sqrt{\pi} & \pi^{-3} \\ e^{\pi/4} & -2 & 0 & 5 & 1 \\ -\pi & e^2 & e^{-1} & \pi^{\sqrt{3}} & 3e \\ 0 & 0 & 0 & \pi^3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \pi^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\overset{*}{=} \det\begin{pmatrix} -e & 0 & 0 \\ e^{\pi/4} & e^2 & 0 \\ 2^{-\pi} & -2 & e^{-1} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \pi^3 & 1 \\ 2 & \pi^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(5.6)(a)}{=} -\cancel{e_3}\cdot e^2 e^{-1} \cdot \det\begin{pmatrix} \pi^{3} & 1 \\ 2 & \pi^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(5.2)(c)}{=} -e^2 \cdot (\pi^3 \cdot \pi^{-3} - 1 \cdot 2)$$

$$= -e^2 \cdot (1-2)$$

$$= e^2 \quad \text{ƒ} \quad //0$$

4.4

b) Seien ein Körper K, $f \in K[X]\setminus\{0\}$ normiert, $n \in \mathbb{N}_0$ und $(a_i)_{i\in[0,n]}$ ~~$a \in K^{n+1}$~~ über K gegeben, so dass $n = \deg f$ und $f = X^n + \sum_{i\in[0,n-1]} a_i X^i$ und $a_n = 1$, also $f = \sum_{i\in[0,n]} a_i X^i$ gilt gegeben.

Zu zeigen: $\chi_{C(f)} = f$

Beweis: $$C(f) := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \cancel{a} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

~~Offensichtlich ist für alle $j \in [1,n]$ die Matrix~~

$$\chi_{C(f)} = \det(X E_{\deg f} - C(f))$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} X & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X \end{pmatrix} - C(f)\right)$$

$$= \det \underbrace{\begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & X & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & X & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_n \end{pmatrix}}_{C''} \quad \checkmark\ //1$$

$$\overset{(5.13)(a)}{=} \sum_{k\in[1,n]} (-1)^{k+n-1}\, C''_{k,n-1}\, \mathrm{Minor}_{k,n-1}(C'') \quad \checkmark\ //1$$

366511

Offensichtlich ist für jedes $j \in [1,n[$ die Matrix

$$C_j''' \begin{pmatrix} c''_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c''_{j-1,1} & \cdots & c''_{j-1,n-1} \\ c''_{j+1,1} & \cdots & c''_{j+1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Es ist $\det C_j''' = \mathrm{Minor}_{j,n-1}(C'') \quad \forall j \in [1,n[$

Da die Diagonale von C'' ~~mit X~~ nur mit X besetzt ist, und unter jedem X ein -1-Eintrag ist, ist mit (S.16): $\forall j \in [1,n[$

$$\mathrm{Minor}_{j,n-1}(C'') = \det C_j''' \overset{(S.16)}{=} \prod_{k\in[1,j[} X \prod_{k\in]j,n-1[} -1$$

$$= X^{j-1}(-1)^{(n-2)-(j-1)}$$

$$= X^{j-1}(-1)^{-(j+1-n)}$$

$$= X^{j-1}(-1)^{-(j+(n-1))}$$

$$= X^{j-1}\frac{1}{(-1)^{(j-(n-1))}}$$

$$= X^{j-1}(-1)^{j-(n-1)}$$

✓ 11①

$$= \sum_{k\in[1,n-1]} (-1)^{k+n-1} c''_{k,n-1} X^{k-1} (-1)^{k-(n-1)}$$

$$= \sum_{k\in[1,n-1]} (-1)^{2k} c''_{k,n-1} X^{k-1}$$

$$= \sum_{k\in[1,n-1]} c''_{k,n-1} X^{k-1}$$

$$= \sum_{k\in[0,n-2]} a_{k-1} X^{k-1} + (X + a_{n-1}) X^{n-1}$$

$$= \sum_{k\in[0,n-2]} a_k X^k + X^n + a_{n-1}X^{n-1}$$

$$= \sum_{k\in[0,n-1]} a_k X^k + X^n \overset{a_n=1}{=} \sum_{k\in[0,n]} a_k X^k = f$$

✓ 11①

QED

10/10

Aufgabe 47 366511 (Georg)

Sei $A \in \mathbb{F}_5^{5\times 5}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zu bestimmen: Die Eigenräume von A sowie die dazugehörigen Eigenwerte und algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

Das char. Polynom χ_A ist nach Def. gegeben durch

$$\chi_A = \det(XE_5 - A)$$
$$= \det\left(\begin{pmatrix} X & & & & \\ & X & & & \\ & & X & & \\ & & & X & \\ & & & & X \end{pmatrix} - A \right)$$
$$= \det\left(\begin{pmatrix} X-2 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & X-2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & X+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X-2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & X-2 \end{pmatrix} \right).$$

Seien $A' \in \mathbb{F}_5^{2\times 2}$ und $B \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$ gegeben durch.

$$A' = \begin{pmatrix} X-2 & -2 \\ 2 & X-2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} X+1 & 1 & 0 \\ 1 & X-2 & -2 \\ -2 & 2 & X-2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt mit dem Kästchensatz (5.15):

1/1

$$\det(XE_5 - A) = (\det A')(\det B)$$

Mit der Leibniz-Formel (5.1) und Beispiel (5.2) ist

$$\det A' = A'_{1,1} A'_{2,2} - A'_{1,2} A'_{2,1}$$
$$= (X-2)(X-2) - (-2)\cdot 2$$

$= (x-2)(x-2)+4$

$= x^2-4x+4 \; +4 \; = x^2-4x+8$

$= (x-1)(x+2)$ ✓ 11 ①

und

$\det B = B_{1,1}B_{2,2}B_{3,3} + B_{1,2}B_{2,3}B_{3,1}$

$+ B_{1,3}B_{2,1}B_{3,2} - B_{1,1}B_{2,3}B_{3,2}$

$- B_{1,2}B_{2,1}B_{3,3} - B_{1,3}B_{2,2}B_{3,1}$

$= (x+1)(x-2)(x-2) + 1\cdot(-2)\cdot(-2)$

$+ 0 \qquad - (x+1)\cdot(-2)\cdot(2)$

$- 1\cdot 1\cdot(x-2) \qquad - 0$

$= x^3-3x^2+4 \quad + 4$

$+ 0 \quad + 4x+4$

$- x+2 \quad - 0$

$= x^3-3x^2+4+4++4-x+2$

$= x^3-3x^2+3x+14 = x^3-3x^2+3x+4$

$= (x-1)(x^2-2x+1)$ ✓

$\Rightarrow$ Es ist also $\det(XE_5-A) = (\det A')(\det B)$

$= (x-1)(x+2)(x-1)(x^2-2x+1)$ $*L$

$= x^5-7x^4+23x^3-30x^2+48$

$\overset{\mathbb{F}_5}{=} x^5-2x^4-2x^3-2$ ✓ 11 ①

Wir bestimmen nun die algebraischen Vielfachheiten von A mit (6.16)(a)ii)). Wir verwenden das char. Polynom um $m_a(A)$ zu bestimmen: Um die Nullstellen zu bestimmen setzen wir alle $x \in \mathbb{F}_5$ in das char. Polynom ein.

$x=0$:

$0^5-2\cdot 0^4-2\cdot 0^3-2 = -2$

$x=1$:

$1^5-2\cdot 1^4-2\cdot 1^3-2 = -5 \overset{F_5}{=} 0$

$x=2$:

$2^5-2\cdot 2^4-2\cdot 2^3-2 = -18 = -3 \overset{F_5}{=} 2$

$x=3$:

$3^5-2\cdot 3^4-2\cdot 3^3-2 = 25 \overset{F_5}{=} 0$

$x=4$:

$4^5-2\cdot 4^4-2\cdot 4^3-2 = 382 \overset{F_5}{=} 2$ ✓

$\Rightarrow$ Die Nullstellen von χ_A sind also $x_0 = 1$ und $x_1 = 3$. ✓ // 1 Anhand der Linearfaktorzerlegung *L lässt sich ablesen, dass $m_1(A)=2$ ✓ und $m_3(A) = 1$ gilt. // 1

Es sind also folglich 1 und -2 die Eigenwerte von A und es ist mit 6.4 $Eig_1(A) = Sol(A-1E_5, 0)$ und $Eig_3(A) = Sol(A+(-2)E_5, 0)$. ✓ // 1

Wir berechnen $Eig_1(A)$:

$$Sol(A-1\cdot E_5, 0) = Sol\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - E_5, 0\right)$$

$$= Sol\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, 0\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow{add_{2,1,-2} \circ add_{3,4,2} \circ add_{5,4,2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow{add_{1,5,-1} \circ add_{4,5,1} \circ add_{2,4,2}}$$

Lineare Algebra zum 06.07.2017 366511; 367129

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{add_{5,3,2} \circ mul_{2,4} \circ add_{2,5,1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{add_{1,2,-1} \circ add_{3,2,-1} \circ add_{5,2,1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{sw_{2,4} \circ mul_{3,2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow Sol(A - 1 \cdot E_5, 0) = \left\{ a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{F}_5 \right\} = \mathbb{F}_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Eig_1(A) = \mathbb{F}_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ✓ 1(1)

Es ist $g_1(A) = \dim Eig_1(A) = 1.$ ✓

Wir berechnen $Eig_3(A)$:

$$Sol(A - 3E_5, 0) = Sol\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 3E_5, 0\right)$$

✓ 1(1)

$$= Sol\left(\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, 0\right)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{add_{5,4,2} \circ add_{3,4,1} \circ add_{2,1,2}}$$

Lineare Algebra zum 06.07.2017 366511; 3~~Z~~67129

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\cancel{add_{2,4,2}}\ add_{2,3,1}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{add_{4,3,2}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\cancel{add_{3,1}} \circ mul_{2,-1}]{add_{4,2,1} \circ add_{3,2,2}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{add_{1,4,1} \circ add_{1,2,1} \circ mul_{3,2} \circ mul_{4,-1}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{sw_{3,4} \circ sw_{2,3}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{mul_{1,-1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Sol(A - 3 \cdot E_5, 0) = \left\{ a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{F}_5 \right\} = \mathbb{F}_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Eig_3(A) = \mathbb{F}_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} //$$

✓ //1

Es ist also $g_3(A) = \dim Eig_3(A) = 1$. //

✓ //1