Lineare Algebra für Informatiker

Abgabe: 16.06.2017

Adrian C. Hinrichs Matr.Nr. 367129
Georg C. Dorndorf Matr.Nr. 366511

#31	#32	Σ
7 / 10	2 / 10	9 / 20

X0

367129
366511

Aufgabe 31 a) Adrian (3)

Gegeben: $n \in \mathbb{N}_0$; Körper K mit $|K| \geq n$; $a \in K^n$ mit $a_i \neq a_j \; \forall i,j \in [1,n]$ mit $i \neq j$

Zu berechnen: Basis s' von $Pol_{<n}(K,K)$ derart, dass

$$M_{e,s'}(\mathcal{E}_a) = E_n \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}_a : Pol_n(K,K) \to K^n \text{ wie im Skript}$$

Nach (3.I) gilt:

$$M_{e,s'}(\mathcal{E}_a) = \begin{pmatrix} s_1'(a_1) & \cdots & s_n'(a_1) \\ \vdots & & \\ s_1'(a_n) & \cdots & s_n'(a_n) \end{pmatrix} \overset{!}{=} E_n$$

(wegen $Pol_{<n}(K,K) \leq Map(K,K)$)

$$\Rightarrow s_i'(a_j) = \delta_{i,j} \text{ für } i,j \in [1,n] \quad (I)$$

//(1)

Sei: $s_i' : K \to K,\; a_k \mapsto \prod_{j \in [1,n] \setminus \{i\}} (a_k - a_j)(a_i - a_j)^{-1}$ //(1)

Es gilt $s_i' \in Pol(K,K) \; \forall i \in [1,n]$, da a_k höchstens $n-1$ mal mit sich selber multipliziert wird.

Offensichtlich erfüllt diese Definition von s_i die Anforderung (I)

Da $M_{e,s'}(\mathcal{E}_a)$ die Einheitsmatrix ist, kann man zu jedem Tupel (b,c) mit $b,c \in K^n$ die (eindeutige) Interpolation ablesen. //(1)

◦ Basis Begründung fehlt. (−2)

367129
366511

Aufgabe 31 b | Adrian

1

Gegeben: $(a,b) = ((-1,0,1,2),(6,3,2,-9))$

Zu Bestimmen: $g \in \mathrm{Intpol}_{\mathrm{Pol}_{<4}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})}((-1,0,1,2),(6,3,2,-9))$

Nach (3.P)(6) gilt:

$$\mathrm{Intpol}_{\mathrm{Pol}_{<4}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})}((-1,0,1,2),(6,3,2,-9)) = \{\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},\, x\mapsto \sum_{j\in[1,4]} c_j x^{j-1} \mid c \in \mathrm{Sol}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}\right)\}$$

✓

Bestimme $\mathrm{Sol}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{add}_{1,2,-1};\\ \mathrm{add}_{3,2,-1};\\ \mathrm{add}_{4,2,-1};\\ \mathrm{sw}_{1,2};\\ \mathrm{sw}_{2,3};}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\mathrm{add}_{3,2,1};\\ \mathrm{add}_{4,2,-2};}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{add}_{4,3,-1};\\ \cancel{\mathrm{add}_{2,3,-1/2}}\\ \mathrm{mul}_{3,1/2}\\ \mathrm{add}_{2,3,-1}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{mul}_{4,1/6}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{add}_{2,4,-1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Dein LGS sieht interessant aus. :)

✓

Es ergibt sich für die ~~Interpolation~~ Menge der Interpolationen also:

$$\mathrm{Intpol}_{\mathrm{Pol}_{<4}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})}((-1,0,1,2),(6,3,2,-9)) = \{\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},\, x\mapsto \sum_{j\in[1,4]} c_j x^{j-1} \mid c \in \{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}\}$$

$$= \{\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},\, x\mapsto 3 + x^2 - 2x^3\}$$

Die Einzige Interpolation zu $((-1,0,1,2),(6,3,2,-9))$ in $\mathrm{Pol}_{<4}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ ist also gegeben durch $g: \mathbb{Q}\to\mathbb{Q},\, x\mapsto 3+x^2-2x^3$ ✓

K(1)

367129
366511

Aufgabe 31 c | Adrian

2

Zu bestimmen: $\mathrm{Intpol}_{\mathrm{Pol}_{<4}(\mathbb{F}_5,\mathbb{F}_5)}((-1,0,1),(-2,-2,0))$

Nach Beispiel (3.P)(6) gilt:

$$\mathrm{Intpol}_{\mathrm{Pol}_{<4}(\mathbb{F}_5,\mathbb{F}_5)}((-1,0,1),(-2,-2,0)) = \{\mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_5,\ x \mapsto \sum_{j\in[1,4]} c_j x^{j-1} \mid c \in \mathrm{Sol}(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix})\}$$

✓ //1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{sup}_{1,2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Auch interessant! :)

$$\xrightarrow{\mathrm{add}_{2,1,-1};\ \mathrm{add}_{3,1,-1};} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{add}_{3,2,1},\ \mathrm{mul}_{2,-1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{mul}_{3,-2},\ \mathrm{add}_{2,3,-1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

✓

$$\Rightarrow \mathrm{Sol}(\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_5\}$$

✓

Ergo ist $\mathrm{Intpol}_{\mathrm{Pol}_{<4}(\mathbb{F}_5,\mathbb{F}_5)}((-1,0,1),(-2,-2,0))$

$$= \{\mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_5,\ x \mapsto \sum_{j\in[1,4]} c_j x^{j-1} \mid c \in \{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_5\}\}$$

$$= \{\mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_5,\ x \mapsto \cancel{\sum_{j\in[1,4]}} -2 + (1-a)x + 1x^2 + ax^3 \mid a \in \mathbb{F}_5\}$$

✓ //1

3

367129
366511

Aufgabe 31 d / Adrian

nach (1)

<u>Gegeben:</u> für $k \in [1,3]$ ist $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(kx)$

Sei: U der $\mathbb{K}$-Untervektorraum mit der Basis $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$

<u>Zu berechnen:</u> Eine Interpretation zu $((0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}), (0, 0, 2))$ in U.

Nach Bemerkung (3.D) gilt:

$$\mathrm{Intpol}(\underbrace{(0, \tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2})}_{a}, \underbrace{(0,0,2)}_{b}) = \{ f \in U \mid f(a_i) = b_i \text{ für } i \in [1,3] \}$$

$$= \{ f \in \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \mid f(a_i) = b_i \text{ für } i \in [1,3] \}$$

$$= \{ f \in \{ af_1 + bf_2 + cf_3 \mid a,b,c \in \mathbb{R} \} \mid f(a_i) = b_i \text{ für } i \in [1,3] \}$$

$$= \{ f \mid f = af_1 + bf_2 + cf_3 \text{ mit } a,b,c \in \mathbb{R}, \text{ so dass } f(a_i) = b_i \text{ für } i \in [1,3] \}$$

$$= \{ f \mid f = af_1 + bf_2 + cf_3 \text{ mit } a,b,c \in \mathbb{R}, \text{ so dass } f(0) = 0,\ f(\tfrac{\pi}{4}) = 0 \text{ und } f(\tfrac{\pi}{2}) = 2 \text{ gilt} \}$$

$$= \{ af_1 + bf_2 + cf_3 \mid \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Sol}(\begin{pmatrix} \cos(1\cdot 0) & \cos(2\cdot 0) & \cos(3\cdot 0) \\ \cos(1\cdot \frac{\pi}{2}) & \cos(2\cdot \frac{\pi}{2}) & \cos(3\cdot \frac{\pi}{2}) \\ \cos(1\cdot \frac{\pi}{4}) & \cos(2\cdot \frac{\pi}{4}) & \cos(3\cdot \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) \}$$

V //(1)

Bestimme $\mathrm{Sol}(\overbrace{\begin{pmatrix} \cos(1\cdot 0) & \cos(2\cdot 0) & \cos(3\cdot 0) \\ \cos(1\cdot \frac{\pi}{2}) & \cos(2\cdot \frac{\pi}{2}) & \cos(3\cdot \frac{\pi}{2}) \\ \cos(1\cdot \frac{\pi}{4}) & \cos(2\cdot \frac{\pi}{4}) & \cos(3\cdot \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}}^{A}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cos(1\cdot 0) & \cos(2\cdot 0) & \cos(3\cdot 0) & 0 \\ \cos(1\cdot \frac{\pi}{2}) & \cos(2\cdot \frac{\pi}{2}) & \cos(3\cdot \frac{\pi}{2}) & 0 \\ \cos(1\cdot \frac{\pi}{4}) & \cos(2\cdot \frac{\pi}{4}) & \cos(3\cdot \frac{\pi}{4}) & 2 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{array}\right)$$

Für den Pfeil gibt es leider (-0,5) Notation ☹

$$\Rightarrow \mathrm{Sol}(A, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\mathrm{Intpol}(a,b) = \{ \sqrt{2}\cdot f_1 + 0\cdot f_2 + (-\sqrt{2})\cdot f_3 \}$$

Also ist die einzige Interpretation von $((0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}), (0,0,2))$ zu $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ gegeben durch $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (\sqrt{2} f_1 + 0 f_2 + (-\sqrt{2}) f_3)(x)$

$$= \sqrt{2}\cdot (f_1(x) - f_3(x))$$

$$= \sqrt{2}\cdot (\cos(x) - \cos(3x))$$

f (3)

Lineare Algebra zum 16.06.2017 366511; 367129

Aufgabe 32 366511

a) 2

Es sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

Zu berechnen: s Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ und t Basis von $\mathbb{R}^{4\times 1}$ so, dass $M_{t,s}(\varphi_A)$ eine Quasieinheitsmatrix ist.

Nach Definition 3.8 gilt:

$$M_{t,s}(\varphi_A) \overset{(\text{mit } 1.59)}{=} (K_t(\varphi_A(s_1)), K_t(\varphi_A(s_2)), K_t(\varphi_A(s_3)))$$

$$\overset{\text{Def.}(3.1)}{=} (K_t(\cancel{\varphi}As_1), K_t(As_2), K_t(As_3))$$

nach Aufgabenstellung

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ mit $a \in [0,1]$ und $b = 0$ falls $a = 0$ sonst $b \in [0,1]$

Da offensichtlich aus $a\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}4\\2\\6\\8\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\-5\end{pmatrix} = 0$ nicht folgt, dass $a=b=c=0$ gilt besteht zwischen den Spalten von A eine lineare abh. und es kann für s nicht einfach die Standardbasis gewählt werden, da sonst t keine Basis werden könnte. ✓

Es folgt weiterhin, dass sich s und t einfach bestimmen lassen, wenn für die Quasieinheitsmatrix $a=0$ und $b=0$ gewählt wird. Dann gilt nämlich

$M_{t,s}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ für $s = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ ✓ "1"

Wo kommt der Vektor her? → Begründung −1

und $t = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\6\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. ✓ "1" t folgt dabei aus den oben beschriebenen Bedingungen sowie dem Basisergänzungssatz. t und s sind offensichtlicherweise lin. unabh. EZS und somit Basen, die die

Wo kommen die her? Begründung fehlt! −1

→ 5

geforderten Eigenschaften erfüllen.

(b) und (c) fehlen!

-6

6