Lineare Algebra für Informatiker

Abgabe: 02.06.2017

Adrian C. Hinrichs Matr.Nr. 367129
Georg C. Dorndorf Matr.Nr. 366511

23	24	Σ
6 / 22	12 / 12	18 / 34

n.T.

366511
367129

Aufgabe 23 | Adrian Hinrichs

6,5

a	b	c	d	e	f	g
✓	✓	✓	✓	x	x	x
4	2	0,5	0			

Gegeben: Körper K, $n \in \mathbb{N}_0$

Setze $K^{n\times n}_{sym} := \{A \in K^{n\times n} \mid A^{tr} = A\}$

$K^{n\times n}_{skew} := \{A \in K^{n\times n} \mid A^{tr} = -A\}$

2 b) Behauptung: $K^{2\times 2} = K^{2\times 2}_{sym} + K^{2\times 2}_{skew}$ gilt.

Beweis:

Es gilt: $K^{2\times 2}_{sym} = \{A \in K^{2\times 2} \mid A^{tr} = A\}$ — Sei char $K \neq 2$ — (−1)

$= \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in K^{2\times 2} \mid \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}^{tr} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in K^{2\times 2} \mid \cancel{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12}\end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in K^{2\times 2} \mid a_{12} = a_{22},\ \underbrace{a_{11} = a_{11},\ a_{22} = a_{22}}_{\text{Tautologien} \Rightarrow \text{fallen weg}}\right\}$

? — wir sind in $\in$ CA und nicht im Ideal! ☹

$= \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix} \mid \cancel{\in K^{2\times 2}}\ a_{11}, a_{22} \in K\right\} + \left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0\end{pmatrix} \mid x \in K\right\}$

$= \left(K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) + K\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ △ ✓

Außerdem gilt:

$K^{2\times 2}_{skew} = \{A \in K^{2\times 2} \mid A^{tr} = -A\}$

$= \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in K^{2\times 2} \mid \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}^{tr} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in K^{2\times 2} \mid \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22}\end{pmatrix}\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in K^{2\times 2} \mid a_{11} = -a_{11},\ a_{22} = -a_{22},\ a_{12} = -a_{21}\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in K^{2\times 2} \mid a_{11} = 0 = -a_{11},\ a_{22} = 0 = -a_{22},\ a_{12} = -a_{21}\right\}$

$\cancel{= \left\{\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{21} & 0\end{pmatrix} \mid a_{21}\right.}$

$= \left\{\begin{pmatrix} 0 & -a_{21} \\ a_{21} & 0\end{pmatrix} \mid a_{21} \in K\right\} = K\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ▲ ✓

Also

Ergo gilt:

$K^{2\times 2}_{sym} + K^{2\times 2}_{skew} = \left(K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + \cancel{K\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}}\ K\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$

$= K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$= K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \left(K\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$

$= K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -z \\ z & 0\end{pmatrix} \mid x, \cancel{y}, z \in K\right\}$

$$= K\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + \left\{\begin{pmatrix}0&x-z\\x+z&0\end{pmatrix} \,\middle|\, x,z \in K\right\}$$

$$\overset{(*)}{=} K\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + \left(K\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$$

$$= K\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$= K^{2\times 2}$$

QED

$(*)$: Z.Z.: $M := \left\{\begin{pmatrix}0&x-z\\x+z&0\end{pmatrix} \,\middle|\, x,z \in K\right\} = K\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + K\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$$K\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}0&0\\2x&0\end{pmatrix} \,\middle|\, x \in K\right\} = \left\{\begin{pmatrix}0&x-x\\x+x&0\end{pmatrix} \,\middle|\, x \in K\right\} \subseteq M$$

$$K\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}0&2x\\0&0\end{pmatrix} \,\middle|\, x \in K\right\} = \left\{\begin{pmatrix}0&x-(-x)\\x-x&0\end{pmatrix} \,\middle|\, x \in K\right\} \subseteq M$$

Kann man so machen, oder du hättest einfach gezeigt, dass

$\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right)$

Basis des $K^{2\times 2}$ bilden...

366511
367129

d) Behauptung: Es existiert ein ~~Vektorraum~~ $n \in \mathbb{N}_0$ und surjektiver Vektorraumhomomorphismus $\mu: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{Ker} \mu = \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$

0

Beweis: Sei: $n = 4$.

Sei: $\phi: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ φ gegeben.

geht aus Dimensionsgründen schon nicht, denn $\dim \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym} = 3$ und $\dim \phi = 4$ $\Rightarrow$ somit kann dein ϕ die geforderten Eigenschaften nicht erfüllen

ϕ ist nun ein Bijektiver Vektorraum-homomorphismus:

~~$\forall x \in \mathbb{R}$: ... ϕ~~

$\forall x \in \mathbb{R}; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt:

$$\phi\left(x\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} xa & xb \\ xc & xd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right)$$
$$= \phi\left(\begin{pmatrix} xa+e & xb+f \\ xc+g & xd+h \end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} xa+e \\ xb+f \\ xc+g \\ xd+h \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} xa \\ xb \\ xc \\ xd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$
$$= x\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$
$$= x\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + \phi\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right)$$

(Mit Bemerkung ~~2.6~~ (2.2)) $\square$

Sei nun $\mu := \phi \circ \varphi$ mit Bemerkung (2.6) ist μ auch ein Vektorraumhomomorphismus.

Da das Kompositum surjektiver Abbildungen wieder surjektiv ist (nach DS), ist μ insgesamt also ein surjektiver Vektorraumhomomorphismus.

Noch zu zeigen: $\operatorname{Ker} \mu = \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$

$$\operatorname{Ker} \mu = \operatorname{Ker}(\phi \circ \varphi) = \{x \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid (\phi \circ \varphi)(x) = 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \phi(\varphi(x)) = 0\}$$

Offensichtlich gilt $\forall z \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\phi(z) = 0^{\mathbb{R}^4}$ genau dann wenn $z = 0^{\mathbb{R}^{2\times 2}}$, also:

$$= \{x \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \varphi(x) = 0\}$$

$= \operatorname{Ker} \varphi$

$\overset{(c)}{=} \mathbb{R}^{2 \times 2}_{sym}$

<u>Insgesamt</u> gilt also die Behauptung

QED

366511
367129

Aufgabe 23 a) (4)

z. Z. $K^{2\times 2}_{sym}$ und $K^{2\times 2}_{skew}$ sind K-Untervektorräume von $K^{2\times 2}$

Aus Aufgabenteil b wird ersichtlich, dass weder $K^{2\times 2}_{skew}$ noch $K^{2\times 2}_{sym}$ ~~für~~ die leere Menge sind.

Sei $A, A' \in K^{2\times 2}_{sym}$, $x \in K$

Zeige: $xA + A' \in K^{2\times 2}_{sym}$

Nach Aufgabenteil b) Δ gilt, dass A der Form $a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ für ein $a,b,c \in K$ und A' $d\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ für ein $d,e,f \in K$ ist. Also:

das brauchst du gar nicht
~> siehe Bem. (A4)

$$xA + A' = x\left(a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) + \left(d\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$$
$$= xa\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + xb\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + xc\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$= xad\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + xbe\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + xcf\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \overset{b\Delta}{\in} K^{2\times 2}_{sym} \quad \blacksquare$$

Sei $B, B' \in K^{2\times 2}_{skew}$, $x \in K$ (weiterhin)

Zeige: $xB + B' \in K^{2\times 2}_{skew}$

Nach Aufgabenteil b) $\blacktriangle$ ~~sind~~ ist B von der Gestalt $g\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ für ein $g \in K$ und B' ist $h\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ für ein $h \in K$. Also:

$$xB + B' = x\left(g\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right) + h\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$= xg\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} + h\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$= xgh\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \overset{b\blacktriangle}{\in} K^{2\times 2}_{skew} \quad \blacksquare$$

Mit Lemma (1.13)(c) sind also $K^{2\times 2}_{sym}$ und $K^{2\times 2}_{skew}$ jeweils Untervektorräume von $K^{2\times 2}$ QED

Für Schiefsym.: Was ist mit char $K = 2$? (-1)

Aus b) Δ und b) $\blacktriangle$ ist ersichtlich, dass gilt: $K^{2\times 2}_{sym} = \left\langle \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \right\rangle$ (a) und $K^{2\times 2}_{skew} = \left\langle \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \right\rangle$ (a)

Diese Erzeugendensysteme sind linear unabhängig (**)

↗

Basen der jeweiligen (Unter-)Vektorräume (1.36)

(**) ~~∄ x ∈ K:~~

$$\cancel{\nexists x \in K\setminus\{0\}: x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \text{ und}$$

$$\cancel{\nexists y \in K\setminus\{0\}: y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \text{ und}$$

$$\cancel{\nexists z \in K\setminus\{0\}: z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Sei $a \in K^3$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

gilt nur für $a = 0$. Mit lemma (1.31)

ist $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ linear unabhängig ■

c) Zu bestimmen: $\mathbb{R}$-Vektorraumhomomorphismen

$\varphi, \psi: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$\operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$, $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^{2\times 2}_{skew}$

$\operatorname{Ker} \psi = \mathbb{R}^{2\times 2}_{skew}$, $\operatorname{Im} \psi = \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$

Bestimme φ:

Notiz:
Für den Kern ~~soll~~ muss nach bKA gelten
~~$\exists a, b, c \in \mathbb{R}$~~ $\operatorname{Ker} \varphi = \{\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

Behauptung: φ entsteht durch die Folgende Abbildungsvorschrift: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xmapsto{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$ ... $A \mapsto A - A^{tr}$

Zu zeigen φ ist tatsächlich ein Vektorraumhomomorphismus und erfüllt die Anforderungen

Zeige φ ist VR-Homomorphismus:

Nach Bemerkung (2.2) genügt der Beweis der Folgenden Gleichheit:

$\forall a \in \mathbb{R}, v, v' \in \mathbb{R}^{2\times 2}: \varphi(av + v') = a\varphi(v) + \varphi(v')$

brauchst du doch schwiiiit!

$$\varphi(av + v') = \varphi\left(a\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v'_{11} & v'_{12} \\ v'_{21} & v'_{22} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \varphi\left(\begin{pmatrix} av_{11} & av_{12} \\ av_{21} & av_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v'_{11} & v'_{12} \\ v'_{21} & v'_{22} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \varphi\left(\begin{pmatrix} av_{11}+v'_{11} & av_{12}+v'_{12} \\ av_{21}+v'_{21} & av_{22}+v'_{22} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & av_{12}+v'_{12}-(av_{22}+v'_{22}) \\ av_{21}+v'_{21}-(av_{12}+v'_{12}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & av_{12}-av_{22} \\ av_{21}-av_{12} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & v'_{12}-v'_{22} \\ v'_{21}-v'_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 0 & v_{12}-v_{22} \\ v_{21}-v_{12} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & v'_{12}-v_{22} \\ v'_{21}-v'_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a\varphi\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} v'_{11} & v'_{12} \\ v'_{21} & v'_{22} \end{pmatrix}$$

Nach Bemerkung (2.2) ist φ ein VR-Homomorphismus. ∎

4

<u>Zeige:</u> $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{ v \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \varphi(v) = 0 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; \varphi\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; \varphi\begin{pmatrix} 0 & v_{12}-v_{21} \\ v_{21}-v_{12} & 0 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; v_{12}-v_{21} = 0,\ v_{21}-v_{12} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; v_{12} = v_{21} \right\}$$ 4

Dies ist nach Aufgabenteil b genau $\mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$ ∎

<u>Zeige:</u> $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^{2\times 2}_{skew}$

$$\operatorname{Im}\varphi = \cancel{\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right.}$$

$$\left\{ \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -(c-b) \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; c, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$ 4

Dies ist nach b exakt die Definition von $\mathbb{R}^{2\times 2}_{skew}$ ∎

φ wird also zu einem VR-Homomorphismus mit den geforderten Eigenschaften. QED

Bestimme ψ:

Notiz:
Für den Kern muss nach b) **1** gelten

1a, $\ker\psi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

Behauptung: ψ entsteht durch folgende

Abbildungsvorschrift: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xmapsto{\psi} \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}$ $=\lambda$ $A \mapsto A + A^{tr}$

Zu zeigen: ψ ist ein UR-Homomorphismus und

ψ erfüllt die geforderten Eigenschaften.

Zeige: ψ ist UR-Homomorphismus

Nach Bem. (1.2) genügt der Nachweis

folgender Gleichung $\forall a \in \mathbb{R};\ v, v' \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$\psi(a v + v') = a\psi(v) + \psi(v')$

brauchst du gar nicht.

$$\psi(av+v') = \psi\left(a\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11}' & v_{12}' \\ v_{21}' & v_{22}' \end{pmatrix}\right)$$

$$= \psi\left(\begin{pmatrix} a v_{11} + v_{11}' & a v_{12} + v_{12}' \\ a v_{21} + v_{21}' & a v_{22} + v_{22}' \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a v_{11} + v_{11}' & a v_{21} + v_{21}' + a v_{12} + v_{12}' \\ a v_{21} + v_{21}' + a v_{12} + v_{12}' & a v_{22} + v_{22}' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a v_{11} & a v_{21} + a v_{12} \\ a v_{21} + a v_{12} & a v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11}' & v_{21}' + v_{12}' \\ v_{21}' + v_{12}' & v_{22}' \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} + v_{12} \\ v_{21} + v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11}' & v_{12}' + v_{21}' \\ v_{21}' + v_{12}' & v_{22}' \end{pmatrix}$$

$$= a\psi\left(\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}\right) + \psi\left(\begin{pmatrix} v_{11}' & v_{12}' \\ v_{21}' & v_{22}' \end{pmatrix}\right)$$

$$= a\psi(v) + \psi(v')$$

Nach Bem. (2.2) ist ψ also ein UR-Homomorphismus.

Zeige: $\ker\psi = \mathbb{R}^{2\times 2}_{\text{skew}}$

$$\ker\psi = \left\{ \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; \psi\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} + v_{21} \\ v_{21} + v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; v_{11} = 0,\ v_{12} + v_{21} = v_{21} + v_{12} = 0,\ v_{22} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; v_{11} = 0,\ v_{22} = 0,\ v_{12} = -v_{21} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

Dies ist nach Aufgabenteil b genau $\mathbb{R}^{2\times 2}_{\text{skew}}$ ∎

2

Zeige $\operatorname{Im} \psi = \mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$

$$\operatorname{Im} \psi = \{ \psi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \}$$

$$= \{ \begin{pmatrix} a & b+c \\ c+b & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \} = \{ \begin{pmatrix} a & x \\ x & d \end{pmatrix} \mid a, b, d, x \in \mathbb{R} \}$$

-0,5 da fehlen noch ein paar Umformungen

Dies ist nach Aufgabenteil b nichts anderes als die $\mathbb{R}^{2\times 2}_{sym}$. QE ■

ψ wird also zu einem UR-Homomorphismus mit den geforderten Eigenschaften. QED

Insgesamt wurden φ und ψ also ~~wie~~ gemäß Anforderungen wie folgt bestimmt:

$$\varphi: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$$ 4

$$\psi: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b+c \\ c+b & d \end{pmatrix}$$ ✓

Lineare Algebra zum 02.06.2017 366511

Tutorium:

24 12

Aufgabe 24 b) 366511 7

(i) Zu zeigen: N ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraumhomomorphismus (VR-Homo.). 2

Beweis: Wir weisen die nötigen Eigenschaften nach Bemerkung 2.2 nach:

Additivität: Seien $v, v' \in U$, $v = v_1 + v_2\sqrt{3}$, $v' = v_1' + v_2'\sqrt{3}$ mit $v_1, v_2, v_1', v_2' \in \mathbb{Q}$.

Es ist $N(v+v') \overset{*}{=} a(v+v')$

*Distributivität

$$= av + av'$$

$$= N(v) + N(v') \quad ✓ \quad 1$$

Homogenität: Seien $v \in U$, $k \in \mathbb{Q}$ mit $v = v_1 + v_2\sqrt{3}$ und $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}$. Es gilt:

$$N(kv) = akv \overset{\text{Kommutativ}}{=} kav = k \cdot N(v) \quad ✓ \quad 1$$

$\Rightarrow$ Mit Bemerkung 2.2 folgt also, dass N $\mathbb{Q}$VR-Homo. ist. (Mit Def. 3.8 und Bsp. 3.9.) ✓ □

(ii) Wir bestimmen die Darstellungsmatrix M_{ss} von N zur Basis s. 2

Es gilt $M_{s,s}(N) = (K_s(N(s_1)) \ \ K_s(N(s_2)))$

$$= (K_s(a_1 + a\sqrt{3}) \ \ K_s(3a_2 + a_1\sqrt{3}))$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 3a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} ✓$$

QEF

2

Sei $v \in U$.

(iii) ③ Es gilt $N(v) = N(v_1 + v_2\sqrt{3})$

$= (a_1 + a_2\sqrt{3})(v_1 + v_2\sqrt{3})$

$\cancel{= a_1 v_1 + a_2 v_2 \sqrt{3}}$

$= a_1 v_1 + a_1 v_2 \sqrt{3} + a_2 v_1 \sqrt{3} + a_2 v_2 3$

$\Rightarrow$ Für $a \neq 0$ gilt $N(v) = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2 = 0$

Für $a = 0$ ist $N(v) \geq 0 \; \forall v \in U$.

Es folgt also $\mathrm{def}_N = \begin{cases} 0, & a \neq 0 \\ 2, & a = 0 \end{cases}$, da ✓ // ①

$\dim U = 2$ folgt mit dem Rangsatz

$(\dim U = \mathrm{def}_N + \mathrm{rk}_N)$

$\mathrm{rk}_N \begin{cases} 2, & a \neq 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}$ ✓ // ①

• Für Begründung: ①

QEF

Lineare Algebra zum 02.06.2017 366511

Tutorium:

Aufgabe 24 a) 5 366511

Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $f_k\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(kx)$ und $g_k\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(kx)$. Es sei $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ in $Map(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben durch $s = (f_1, f_2, g_1, g_2)$ und es sei $U := \langle f_1, f_2, g_1, g_2 \rangle$.

Es sei $D: U \to U$ der eindeutige K-VR-Homo. mit $D(f_k) = k g_k$ und $D(g_k) = -k f_k$ für $k \in \{1, 2\}$.

(i) Wir bestimmen die Darstellungsmatrix $M_{s,s}$ von D zu s. (Mit Def. 3.8 und Bsp. 3.9.):

2

Es ist:

$$M_{s,s} = (K_s(D(s_1))\ K_s(D(s_2))\ K_s(D(s_3))\ K(D(s_4)))$$

Es ist

$$K_s(s_1) = K_s(D(\sin(x))) = K_s(\cos(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{da } \cos x = 1 \cdot s_2$$

$$K_s(s_2) = K_s(D(f_2)) = K_s(2g_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{da } 2g_2 = 2 \cdot s_4$$

$$K_s(s_3) = K_s(D(g_1)) = K_s(-f_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{da } -f_1 = -1 \cdot s_1$$

$$K_s(s_4) = K_s(D(g_2)) = K_s(-2f_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{da } -2f_2 = -2 \cdot s_2$$

es ~~fol~~ ergibt sich unmittelbar: ✓ //1

$$M_{s,s}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ✓ //1

QEF

(ii) Zu bestimmen: Basis t von U so, dass $M_{t,s}$ Einheitsmatrix wird.

3

$$M_{t,s}(D) = M_{t,(f_1, f_2, g_1, g_2)}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✓ //1

↪

$$\Leftrightarrow K_t(D(f_1)) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \wedge K_t(D(f_2)) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\wedge K_t(D(g_1)) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge K_t(D(g_2)) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow g_1 = 1\cdot t_1 \wedge 2g_2 = 1\cdot t_2 \wedge -f_1 = 1\cdot t_3 \wedge -2f_2 = 1\cdot t_4$$

$$\Leftrightarrow t = (g_1, 2g_2, -f_1, -2f_2)$$

Da $s = (f_1, f_2, g_1, g_2)$ eine Basis von U ist folgt* nach 1.35 und 1.55, dass t eine Basis von U ist.

*(da $|t| = |s|$)

Also erhalten wir t mit $t = (g_1, 2g_2, -f_1, -f_2)$ als Basis von U, diee die geforderten Eigenschaften erfüllt.

QEF