# Lineare Algebra für Informatiker

Abgabe: 26.05.2017

Adrian C. Hinrichs Matr.Nr. 367129
Georg C. Dorndorf Matr.Nr. 366511

| 17 | 18 | Σ |
|---|---|---|
| 5 / 10 | 6,5 / 10 | 11,5 /20 |

N.T.

Bitte beide Seiten eurer Blätter beschriften! Das ist nämlich Papierverschwendung und schlecht für die Umwelt! :/

366511
367129

# Aufgabe 17

a) gegeben: Körper $K$;

$K$-Vektorräume $V$&$W$;

$K$-Vektorraumhomomorphismus $\varphi: V \to W$;

$n \in \mathbb{N}_0$;

$n$-Tupel $(s_1, \dots, s_n)$ in $V$

Zu zeigen: Wenn $(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))$ linear unabhängig in $W$ ist, ist auch $(s_1, \dots, s_n)$ linear unabhängig in $V$.

Beweis: Die Behauptung ist Äquivalent zu ~~Wahr!~~ folgender Aussage: Wenn $(s_1, \dots, s_n)$ linear abhängig in $V$ ist, ist auch $(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))$ linear abhängig in $W$. $\triangle$

Es existiert also $a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$; $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$, so, dass $a_j = 0$ und

$$s_j = \sum_{i \in [1,n]} a_i s_i \overset{a_j=0}{=} \sum_{i \in [1,n] \setminus \{j\}} a_i s_i$$

Da $\varphi$ ein VR-Homomorphismus ist, folgt daraus

$$\varphi(s_j) = \varphi\Big(\sum_{i \in [1,n] \setminus \{j\}} a_i s_i\Big)$$

Sei: $I := [1,n] \setminus \{j\}$

$$= \sum_{i \in I} \varphi(a_i s_i)$$

$$= \sum_{i \in I} a_i \varphi(s_i)$$

Somit ist $\varphi(s_j)$ eine Linearkombination von $(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_{j-1}), \varphi(s_{j+1}), \dots, \varphi(s_n))$, also ist $(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))$ linear abhängig in $W$. ✓

QED

~~Du hast nichts gezeigt!~~

Sorry, das ist natürlich richtig! ☺

366511
367129

b) Gegeben: Körper $K$;

3

Menge $X$;

$m, n \in \mathbb{N}_0$

$n$-Tupel $(f_1, \dots, f_n)$ in $Map(X, K)$;

$m$-Tupel $(x_1, \dots, x_m)$ in $X$.

Zu zeigen: Wenn $((f_1(x_1), \dots, f_1(x_m)), \dots, (f_n(x_1), \dots, f_n(x_m))$ linear unabhängig in $K^m$ ist, ist $(f_1, \dots, f_n)$ linear unabhängig in $Map(X, K)$.

Beweis: Gemäß der Aussagenlogik genügt der Nachweis, dass aus $(f_1, \dots, f_n)$ ist linear abhängig in $Map(X, K)$ folgt $(f_1(x_1), \dots, f_1(x_m), \dots, f_n(x_1), \dots, f_n(x_m))$ linear abhängig in $K^m$.

Zeige dies: ~~Sei~~ Betrachte die ~~eine~~ Abbildung $\varphi: Map(X, K) \to K^m$ mit $f \mapsto (f_1(x_1), \dots, f(x_m))$ gegeben.

Zeige: $\varphi$ ist ein Vektorraumhomomorphismus

Nach Bemerkung (2.2) genügt dazu der Nachweis der folgenden zwei Eigenschaften:

1. Verträglichkeit der Addition

Seien $g, g' \in Map(X, K)$

$$\begin{aligned}\varphi(g+g') &= ((g+g')(x_1), \dots, (g+g')(x_m)) \\ &= (g(x_1)+g'(x_1), \dots, g(x_m)+g'(x_m)) \\ &= (g(x_1), \dots, g(x_m)) + (g'(x_1), \dots, g'(x_m)) \\ &= \varphi(g) + \varphi(g') \quad \blacksquare\end{aligned}$$

✓ //1

2. Verträglichkeit der Skalarmultiplikation

Seien $g \in Map(X, K)$ und $a \in K$

$$\begin{aligned}\varphi(ag) &= ((ag)(x_1), \dots, (ag)(x_m)) \\ &= (a(g(x_1)), \dots, a(g(x_m))) \\ &= a(g(x_1), \dots, g(x_m)) = a\varphi(g) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

✓ //1

366511
367129

$\Psi$ wird zum Vektorraumhomomorphismus $\square$ ✓

Mit dem K-Vektorraumhomomorphismus $\Psi$, der die K-Vektorräume $Map(X, K)$ und $K^n$ miteinander verbindet folgt nun die Behauptung direkt aus dem Beweis für Aufgabenteil a. ✓ 1(1)

QED

wieso schreibst du deine Blätter nicht voll???

366511
367129

c) Gegeben: $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(kx)$;
$g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(kx)$

0

Behauptung: $(f_1, f_2, g_1, g_2)$ ist linear unabhängig in $Map(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Vorbereitung:

$\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Z}$-Vektorraum, da:

Seit wann ist $\mathbb{Z}$ ein Körper? −1

▹ Assoziativität der Addition

▹ Existenz d. Nullvektors

▹ Existenz d. negativen Vektoren

▹ Kommutativität d. Addition

daraus folgt, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist und

▹ Assoziativität der Skalarmultiplikation

▹ Neutralität der 1

▹ Distributivität

daraus folgt, dass der Körper $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

Laut meinem Informationsstand ist $\mathbb{Z}$ ein Ring. Oder was ist z.B. das Inverse zu 2 bzgl. „·"? :)

Beweis: Sei das 2-Tupel $(\frac{\pi}{2}, 1)$ gegeben.

Nun ist $((f_1(\frac{\pi}{2}), f_1(1)), (f_2(\frac{\pi}{2}), f_2(1)), (g_1(\frac{\pi}{2}), g_1(1)), (g_2(\frac{\pi}{2}), g_2(1)))$

$= ((\sin(\frac{\pi}{2}), \sin(1)), (\sin(2\frac{\pi}{2}), \sin(2)), (\cos(\frac{\pi}{2}), \cos(1)), (\cos(2\frac{\pi}{2}), \cos(2)))$

$= ((1, \sin(1)), (0, \sin(2)), (0, \cos(1)), (-1, \cos(2)))$

$\approx ((1, 0{,}8414); (0; 0{,}9092); (0; 0{,}5403); (-1; -0{,}4161))$

Wieso wählst du als Stützstellen nicht $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$? Da bekommt man schönere Zahlen raus. :)

Offensichtlich ~~nicht~~ linear unabhängig in $\mathbb{R}$.

Mir ist das nicht offensichtlich. :) Das musst du schon durch ein LGS zeigen! −2

Mit Aufgabenteil b folgt die lineare Unabhängigkeit von $(f_1, f_2, g_1, g_2)$ in $Map(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

0 (−1)

Dein Beweis ist leider unvollst. und fehlerhaft. :(

4

Lineare Algebra zum 26.05.2017 366511; 367129

Tutorium: 6 ~~5,5~~ ~~6~~ 6,5

Aufgabe 18 366511 Georg Domdorf

Es sei $B \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ gegeben durch $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ferner sei $\varphi: \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}, A \mapsto AB - B^{tr}A$.

Zu zeigen: $\varphi$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraumhomomorphismus.

Zu bestimmen: Die Basis von $\ker\varphi$ sowie $\operatorname{Im}\varphi$.

Außerdem Defekt und Rang von $\varphi$.

? Vorraussetzung: $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ wird auf geeignete Weise ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. (Zum Beispiel wie in Beispiel 1.4).

das brauchst du doch gar nicht!

Beweis, dass $\varphi$ VR-Homo:

Nach Bemerkung 2.2 ist $\varphi$ genau dann ein VR-Homomorphismus wenn gilt:

- Verträglichkeit mit der Addition (Additivität):
  Für $v, v' \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ ist $\varphi(v+v') = \varphi(v) + \varphi(v')$.
- Verträglichkeit mit der ~~Ad~~ Skalarmultiplikation (Homogenität):
  Für $v \in \mathbb{Q}^{2+2}$, $k \in \mathbb{Q}$ ist $\varphi(kv) = k\,\varphi(v)$.

1. Wir weisen die* Additivität nach: ~~*Verträglichkeit mit der~~

Seien $v, v' \in \mathbb{Q}^{2+2}$.

$$\varphi(v+v') = (v+v')B - B^{tr}(v+v')$$

$$\overset{\text{Def. 1.1 Distributivität}}{=} (vB + v'B) - (B^{tr}v + B^{tr}v')$$

$$\overset{\text{Def 1.1}}{=} vB - B^{tr}v + v'B - B^{tr}v'$$

$$\varphi(v) + \varphi(v') = vB - B^{tr}v + v'B - B^{tr}v'$$

$$\Rightarrow \varphi(v+v') = \varphi(v) + \varphi(v')$$ ✓ // 1 ■

2. Wir weisen die Homogenität nach:

Seien $v \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, $k \in \mathbb{Q}$.

5 4

~~Sei $k \in \mathbb{Q}$, $v \in \mathbb{Q}^{2\times2}$~~ -0,5

$$\varphi(kv) = k\,vB - B^{tr}\,k\,v$$

$$k\,\varphi(v) = k\,(vB - B^{tr}v)$$

$$\overset{\text{Definition 1.1}}{\underset{\text{Distributivität}}{=}} k\,vB - k\,B^{tr}v$$

$$\overset{\text{Definition 1.1.}}{\underset{\text{Kommutativität}}{=}} k\,vB - B^{tr}\,k\,v$$

$$\Rightarrow \varphi(kv) = k\,\varphi(v)$$ // 0,5

$\Rightarrow$ Insgesamt ist $\varphi$ nach Bemerkung 2.2 ein Vektorraumhomomorphismus. $\square$

Wir bestimmen nun eine Basis von Ker $\varphi$. Hierzu bestimmen wir zunächst Ker $\varphi$ nach Definition 2.12. (Wir folgen dabei der Vorgehensweise von Beispiel 2.13b).).

$$\text{Ker}\,\varphi = \{v \in \mathbb{Q}^{2\times2} \mid \varphi(v) = 0\} \qquad *1$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times2} \;\middle|\; \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times2} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} B - B^{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times2} \;\middle|\; \begin{pmatrix} c-b & b+d \\ -c-d & 0 \end{pmatrix} = 0\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times2} \;\middle|\; \begin{pmatrix} c-b \\ b+d \\ -c-d \\ 0 \end{pmatrix} = 0\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times2} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times2} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \text{Sol}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0\right)\right\}$$

6

Lineare Algebra zum 26.05.2017 366511; 367129

Tutorium: 6

Wir wenden ~~E~~ elementare Zeilenoperationen an:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{add_{2,1,1}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \overbrace{-b+c=0}^{(\mathrm{I})} \wedge \overbrace{c+d=0}^{\mathrm{II}}$$

$$\Leftrightarrow c=b \wedge d=-c=-b$$

$$\Leftrightarrow Sol(A|0) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ -b \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathbb{Q}\cancel{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{Q}\cancel{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich:

$$\operatorname{Ker} \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Es folgt unmittelbar, dass $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ Erzeugendensystem von $\operatorname{Ker} \varphi$ ist.

Behauptung: $\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ist linear unabhängig.

Beweis: Mit Lemma 1.31:

$\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ist linear unabhängig wenn für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ ~~mit~~ aus $a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ stets folgt, dass $a = b = 0$ gilt.

$$a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & a \\ a & -a \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a = b = 0$$

$\boxtimes$

Mit Definition 1.36 folgt also, dass

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von Ker $\varphi$ ist.

✓ // 3

(~~Kern~~ Defekt*)

Wir bestimmen nun eine Basis von Im $\varphi$. Hierzu bestimmen wir zunächst ~~Im $\varphi$ nach~~ das Bild von $\varphi$. (Nach der Vorgehensweise in Beispiel 2.13a).)

Es ist

$$\operatorname{Im}\varphi = \left\{ \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \right\}$$

$$\overset{*1}{=} \left\{ \begin{pmatrix} -c-d & b+d \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \right\}$$

$$= \left\{ (-c-d)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (b+d)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (c-b)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, b,c,d \in \mathbb{Q} \right\} \quad ?$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wir erhalten also $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{Im}\varphi$ als ein Erzeugendensystem (EZS) unseres VR.

Behauptung: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) := (s_1, \dots, s_i)$ ist eine Basis von Im $\varphi$.

Beweis: Nach Def. 1.36 ist $(s_1, \dots, s_i) := S$ Basis von Im $\varphi$ g.d. wenn $S$ ein linear unabhängiges EZS von Im $\varphi$ ist.

$S$ ist nach Lemma 1.31 genau dann linear unabhängig wenn für alle $a,b,c \in \mathbb{Q}$ aus

$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$ folgt, dass $a=b=c=0$ gilt.

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Lineare Algebra zum 26.05.2017 366511; 367129

Tutorium: 6

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = b = c = 0$$

$\Rightarrow$ s ist linear unabhängiges EZS von $\operatorname{Im} \varphi$

(Rang*) $\overset{\text{Def. 1.36}}{\Rightarrow}$ s ist also eine Basis von $\operatorname{Im} \varphi$. $\square$

local ① für Ansatz.

Wir bestimmen nun den Rang von $\varphi$ mit Definition (2.21).

$$\operatorname{rk} \varphi = \dim_{\mathbb{Q}}(\operatorname{Im} \varphi)$$

$\overset{\text{mit (Rang*)}}{\Rightarrow} \operatorname{rk} \varphi = 3$ ✓ // Folgefehler

Wir haben den ~~als~~ Rang von $\varphi$ als ~~als~~ 3 bestimmt.

Wir bestimmen nun den Defekt von $\varphi$ mit Definition (2.21).

$$\operatorname{def}_\varphi = \dim_{\mathbb{Q}}(\operatorname{Ker} \varphi)$$

$\overset{\text{mit (Defekt*)}}{\Rightarrow} \operatorname{def}_\varphi = 2$ ✓ // ①

Wir haben den ~~als~~ Defekt von $\varphi$ als 2 bestimmt.

⑨