Lineare Algebra für Informatiker

Abgabe: 18.05.2017

Adrian C. Hinrichs Matr.Nr. 367129
Georg C. Dorndorf Matr.Nr. 366511

11	12	Σ
7/10	1/10	8/20

N.T.

363129
366511

Aufgabe 11

A. Hinrichs

Sei ein Körper K gegeben, sei ferner ein K-Vektorraum V gegeben. Seien $v, w, x, y \in V$

Noch (1) für Ausstz.

a) Gegeben: Sei (v,w,x) linear unabhängig in V

Zu zeigen: Dann ist auch $s := (v+x, w+x, v+w-x)$ linear unabhängig in V.

Beweis: Nach (1.31) ist s ist linear unabhängig in V äquivalent zu: für $a \in K^n$ und $\sum_{i \in [1,n]} a_i s_i = 0$ folgt stets $a = 0$.

Die Aussage ist falsch, Adrian. Betrachte $V = \mathbb{F}_3^3$, $K = \mathbb{F}_3$.

Also:

$$a_1(v+x) + a_2(w+x) + a_3(v+w-x) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 v + a_1 x + a_2 w + a_2 x + a_3 v + a_3 w - a_3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 v + a_3 v + a_2 w + a_3 w + a_2 x + -a_3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_3) v + (a_2 + a_3) w + (a_1 + a_2 - a_3) x = 0$$ ✓

Sei nun $b \in K^n$ mit $b = (a_1 + a_3, a_2 + a_3, a_1 + a_2 - a_3)$. Unter (erweiterter) Anwendung von Lemma (1.31) folgt unter der Vorraussetzung, dass (v,w,x) linear unabhängig in V ist, dass $b = (a_1 + a_3, a_2 + a_3, a_1 + a_2 - a_3) = 0$ gelten muss, damit die Behauptung gilt. Zeige nun $b = 0$:

$(a_1 + a_3, a_2 + a_3, a_1 + a_2 - a_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{add_{3,1,-1};\\ add_{3,2,-1}}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{add_{2,3,+\frac{1}{3}};\\ add_{1,3,+\frac{1}{3}}\\ mul_{3,-\frac{1}{3}}}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt also aus $a \cdot s = 0$ stets $a = 0$, ~~sofern~~ wenn $3 \in K^{\times}$.

(✓)

Die Beh. gilt also mit (1.31) für alle Körper K mit $3 \in K^{\times}$, für alle anderen nicht.

QED

b) Gegeben: (v,w,x,y) linear unabhängig in V

Z. z.: $(2v+w+x,\ w-2x+2y,\ -v+2x-2y) =: l$ ist linear unabhängig in V

5

Sei: $a \in K^n$ gegeben.

Damit l linear unabhängig in V ist, muss nach (1.31) aus $\sum_{i\in(1,n)} a_i s_i = 0$ stets $a = 0$ folgen. ✓

Also: $a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow a_1(2v+w+x) + a_2(w-2x+2y) + a_3(-v+2x-2y) = 0$

$\Leftrightarrow a_1 2v + a_1 w + a_1 x + a_2 w - a_2 2x - a_2 2y + a_3 v + a_3 2x - a_3 2y = 0$

$\Leftrightarrow a_1 2v - a_3 v + a_1 w + a_2 w + a_1 x - a_2 2x + a_3 2x - a_2 2y - a_3 2y = 0$

$\Leftrightarrow (a_1 2 - a_3)v + (a_1 + a_2)w + (a_1 - a_2 2 + a_3 2)x + (-a_2 2 - a_3 2)y = 0$

✓ 2

Da (v,w,x,y) linear unabhängig in V ist:

$\overset{(1.31)}{\Leftrightarrow} (a_1 2 - a_3,\ a_1 + a_2,\ a_1 - a_2 2 + a_3 2,\ -a_2 2 - a_3 2) = 0$ ✓

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{add_{3,2,-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto[mul_{4,-3\cdot\frac{1}{10}}]{add_{4,3,-\frac{2}{3}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad 3, 10 \in K^\times$$

$$\xmapsto{add_{1,4,1};\ add_{3,4,-2};\ mul_{3,-\frac{1}{3}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad 3 \in K^\times$$

$$\xmapsto{mul_{1,\frac{1}{2}};\ add_{2,3,-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad 2 \in K^\times$$

Da sich das LGS für den Fall, dass $2, 3, 10 \in K^\times$ ist l in diesem Fall nach (1.31) linear unabhängig in V, ansonsten abhängig in V ?

QED

Die oben angegebene Basis ist immer lin. unabh. in V

-1

Beh.? Bew.?. Gegenbsp.?

c) Sei $U = \mathbb{R}^4$ und $V = \mathbb{R}^4$. Nun ist $(v, w, x, y) = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$ die Standardbasis von $U = \mathbb{R}^4$ (1.40). Ferner ist

1

$(2v+w+x, 2v-w-x, 2v-2w-x)$

$$= (2(1,0,0,0) + (0,1,0,0) + (0,0,1,0), \; 2(1,0,0,0) - (0,1,0,0) - (0,0,1,0), \; 2(1,0,0,0) - 2(0,1,0,0) - (0,0,1,0))$$
$$= ((2,1,1,0), (2,-1,-1,0), (2,-2,-1,0))$$

offensichtlich kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$, da z.B der Vektor $(0,0,0,1)$ ~~nicht~~ $\in \mathbb{R}^4$ nicht in dem durch (v,w,x,y) erzeugten Vektorraum enthalten ist.

QED

Lineare Algebra zum 18.05.2017 367129; 366511

Aufgabe 12 366511 Georg C. Dorndorf

a) Wache 0,5

Jeder K-Vektorraum (VR) wird bezüglich der Addition zu einem U-VR, da die Addition durch die unterliegende Menge V^* vorgegeben ist. (* des Vektorraums)

Nach Def. (1.1) ist die Addition für eine Menge V als $+^V: V \times V \to V, (x,y) \mapsto x+y$ definiert.

Die Skalarmultiplikation hingegen wird durch den Körper K gegeben (oder hier U). Nach Def. (1.1) ist sie als $\cdot^K:$ ~~$K \times K \to$~~ $K \times V \to V,$ $(x, v) \mapsto x \cdot v = xv$.

U wird also zu einem V-VR mit $\cdot^U: U \times V \to V, (a, v) \mapsto a, v = av$ U soll zu U-VR werden! -0,5

wenn $a \cdot^K v = a \cdot^U v$ gilt $(a \in U)$.

Da nach Vorraussetzung $U \subseteq K$ gilt ist auch $a \in K$ und K-VR wird zu U-VR. □

1

Lineare Algebra zum 18.05.2017 367129; 366511

Aufgabe 12 366511 Georg C. Dorndorf

b) Noch (a.s) für Ansatz! $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-VR.

Wir fassen $\mathbb{C}$ als Tupel (a,b) mit $a,b \in \mathbb{R}$ auf.
a ist dabei der Realteil und b der Imaginärteil.

Behauptung: Jedes $c \in \mathbb{C}$ ist eine Linearkombination von $((1,0),(0,1))$, das heißt es ist $\langle (1,0),(0,1) \rangle = \mathbb{C}$. Ne, denn $(1,0),(0,1) \notin \mathbb{C}$!!!

Beweis: (Wie in Bsp. 1.17) Für $c \in \mathbb{C}$ ist (a.s)

$$c = (c_1, c_2) = (c_1, 0) + (0, c_2) = c_1 (1,0) + c_2 (0,1)$$

$* \square$

Behauptung: $((1,0),(0,1))$ ist Erzeugendensystem von $\mathbb{C}$. s.o.

Beweis: Nach der Definition eines Erzeugendensystems (1.22) ist $((1,0),(0,1)) =: (s_1, s_2)$ ein Erzeugendensystem wenn $\langle s_1, s_2 \rangle = \langle (1,0),(0,1) \rangle = \mathbb{C}$ gilt. s.o.
Dies gilt nach $*$. $\square$

Damit $((1,0),(0,1))$ Basis von $\mathbb{C}$ ist muss nach Def. (1.36) gelten, dass $(1,0),(0,1)$ linear unabhängig sind. Dies ist nach Lemma (1.31) der Fall wenn für $a,b \in \mathbb{R}$ aus s.o.

$$a(1,0) + b(0,1) = 0$$

stets $a=0$ und $b=0$ folgt.
Dies ist offensichtlich der Fall

$$a(1,0) + b(0,1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (a,0) + (0,b) = 0$$
$$\Leftrightarrow (a,b) = 0$$

Basis von $\mathbb{C}$ ist $(1, i)$ wobei $i \cong \binom{0}{1} \in \mathbb{R}^2$, $1 \cong \binom{1}{0} \in \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-VR.

Insgesamt haben wir also $((1,0),(0,1))$ als eine Basis von $\mathbb{C}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum bestimmt. QED

5