Lineare Algebra für Informatiker

Abgabe: 11.05.2017

Adrian C. Hinrichs Matr.Nr. 367129
Georg C. Dorndorf Matr.Nr. 366511

5	6	Σ
7,5/10	6,5/10	14/20

NT

367129
366511

Aufgabe 5 | A. Hinrichs

$\mathbb{O} := 0$ »Null«
$\emptyset := \{\}$ »leere Menge«

Aufgabenteil a)

Gegeben sei ein Körper K

(i) ~~Zu~~ Gegeben seien zwei K-Vektorräume V_1 und V_2.

Zu zeigen: Zusammen mit Addition gegeben durch $(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$ und Skalarmultiplikation durch $a(v_1, v_2) = (a v_1, a v_2)$ (für jeweils $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in V_1 \times V_2$ und $a \in K$) wird $V_1 \times V_2$ ein K-Vektorraum. Nach Def. (1.1) reicht dazu der Nachweis der folgenden Eigenschaften:

▷ Assoziativität der Addition: Seien $(v_1, v_2), (w_1, w_2), (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$

$$(v_1, v_2) + ((w_1, w_2) + (x_1, x_2)) = (v_1, v_2) + (w_1 + x_1, w_2 + x_2)$$
$$= (v_1 + (w_1 + x_1), v_2 + (w_2 + x_2))$$
$$\stackrel{*}{=} ((v_1 + w_1) + x_1, (v_2 + w_2) + x_2)$$
$$= (v_1 + w_1, v_2 + w_2) + (x_1, x_2)$$
$$= ((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) + (x_1, x_2) \quad \square$$

▷ Existenz des Nullvektors ~~These~~ Beh.: Der Nullvektor von $V_1 \times V_2$ ist gegeben durch $(\mathbb{O}^{V_1}, \mathbb{O}^{V_2})$

Beweis: Sei: $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$

$$(v_1, v_2) + (\mathbb{O}^{V_1}, \mathbb{O}^{V_2}) = (v_1 + \mathbb{O}^{V_1}, v_2 + \mathbb{O}^{V_2})$$
$$= (v_1, v_2)$$

(Da Addition ~~Assozi~~ Kommutativ (s. unten)) $\square$

-0,5 Was ist mit $(0,0) + (v_1, v_2)$?

▷ Existenz der negativen Vektoren

~~These~~: $\forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \; \exists (w_1, w_2) \in V_1 \times V_2$, so dass gilt: $(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = \mathbb{O} = (w_1, w_2) + (v_1, v_2)$

~~These~~ Beh.: Dieses (w_1, w_2) (notiert als $-(v_1, v_2)$) ist gegeben durch $(-v_1, -v_2) \quad \forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$)

Beweis: Sei $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) \overset{(TVsa)}{=} (v_1, v_2) + (-v_1, -v_2)$$
$$= (v_1 - v_1, v_2 - v_2)$$
$$\overset{*}{=} (0, 0)$$
$$\overset{*}{=} (-v_1 + v_1, -v_2 + v_2)$$
$$= (-v_1, -v_2) + (v_1, v_2)$$
$$= (w_1, w_2) + (v_1, v_2)$$

$\square$

▷ Kommutativität der Addition

Für alle $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in V_1 \times V_2$ gilt:

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$
$$\overset{*}{=} (w_1 + v_1, w_2 + v_2)$$
$$= (w_1, w_2) + (v_1, v_2)$$

$\square$

▷ Assoziativität ~~der Addition~~ der Skalarmult.

Für $a, b \in K$, $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ gilt:

$\cancel{a(bv) \overset{0}{=} (ab)v}$

$$a(b(v_1, v_2)) = a(bv_1, bv_2) = (a(bv_1), a(bv_2))$$
$$\overset{*}{=} ((ab)v_1, (ab)v_2)$$
$$= (ab)(v_1, v_2)$$

$\square$

▷ Neutralität der 1 bzgl. Skalarmult.

Sei: $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$:

$$1 \cdot (v_1, v_2) = (1v_1, 1v_2)$$
$$\overset{*}{=} (v_1, v_2)$$

$\square$

▷ Distributivität Seien $a, b \in K$, $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in V_1 \times V_2$

Es gilt 1.:
$$(a+b)(v_1, v_2) = ((a+b)v_1, (a+b)v_2)$$
$$\overset{*}{=} (av_1 + bv_1, av_2 + bv_2)$$
$$= (av_1, av_2) + (bv_1, bv_2)$$

367129
366511

$= a(v_1, v_2) + b(v_1, v_2)$ ■

Ferner gilt: $a((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) = a(v_1 + w_1, v_2 + w_2)$

$= (a(v_1 + w_1), a(v_2 + w_2))$

$\overset{*}{=} (av_1 + aw_1, av_2 + aw_2)$

$= (av_1, av_2) + (aw_1, aw_2)$

$= a(v_1, v_2) + a(w_1, w_2)$ ■

Die distributivität gilt also bezüglich Skalarmultiplikation und Addition.

□

Insgesamt wird also $V_1 \times V_2$ zu einem K-Vektorraum

QED

* für $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ ist $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$. Bei V_1 und V_2 handelt es sich um K-Vektorräume, so dass die Vektorraumaxiome gelten.

4,5

367129
366511

ii) Gegeben: Menge X

Zu zeigen: Map(X, K) wird durch Addition und Skalarmultiplikation aus Bsp. (1.4)(e):

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;

~~(f·g)(x)~~

$(af)x = af(x)$

(für $f, g \in Map(X,K)$, $a \in K$)

zu einem K-Vektorraum.

Beweis: Nach Def (1.1) müssen folgende Axiome nachgewiesen werden: | Seien im folgenden $f, g, h \in Map(X,K)$ und $a, b \in K$ |

▷ Assoziativität der Addition

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x)$$
$$= (f(x)+g(x)) + h(x)$$
$$\overset{\circ}{=} f(x) + (g(x) + h(x))$$
$$= f(x) + (g+h)(x)$$
$$= (f+(g+h))(x) \quad \square$$

▷ Existenz der Negativen

Da alle ~~Vektoren~~ Elemente aus Map(X, K) Funktionen sind, die auf den Körper K abbilden, existiert zu jedem $f(x)$ $(x \in X)$ ein $-f(x)$, so dass gilt $-f(x) + f(x) = f(x) + (-f(x)) = 0$ (gilt nach den Körperaxiomen) $\square$

▷ Existenz des Nullvektors

Da alle Elemente des ~~betrachtetes~~ ~~K-Vektorraumes~~ (zu beweisendes) K-Vektorraumes ~~Funktion~~ Abbildungen mit der Wertemenge K sind, ist der Nullvektor ~~die~~ offensichtlich gegeben durch die Abbildung $0: X \to K,\ x \mapsto 0^K$. $\square$

-0,5 Nachrechnen!

367129
366511

<u>Kommutativität der Addition</u>

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \overset{\circ}{=} g(x)+f(x) = (g+f)(x)$$

<u>Assoziativität der Skalarmultiplikation</u>

$$(a(bf))(x) = a((bf)(x)) \overset{f}{=} a(bf(x))$$

$$\overset{\circ}{=} ab\, f(x)$$

$$\overset{\circ}{=} (ab)\, f(x)$$

$$= ((ab)f)(x) \quad \square$$

$= a(bf)(x)$
$= a(bf(x))$
$= (ab)\, f(x)$
$= ((ab)\, f)(x)$

−1

<u>Neutralität der Eins bzgl. Skalarmultiplikation</u>

Da die Skalare aus dem Körper K stammen und die Vektoren Abbildungen sind, deren Ergebnisse in K liegen, ist ~~das~~ $1 \in K$ offensichtlich auch gleichzeitig das neutrale Skalar.

−0,5

Nachrechnen!

<u>Distributivität bzgl. Skalarmult. und Addition</u>

$$(a(f+g))(x) = a(f+g)(x) = a(f(x)+g(x))$$

$$\overset{\circ}{=} af(x)+ag(x)$$

$$= (af)(x)+(ag)(x)$$

$$= (af\, \cancel{g(x)} + ag(x))$$

(✓) du willst $(af+ag)(x)$

$$((a+b)f)(x) = (a+b)f(x) \overset{\circ}{=} af(x)+bf(x)$$

$$= (af)(x)+(bf)(x)$$

$$= (af+bf)(x)$$

Distributivität gilt also bezüglich Addition und Skalarmultiplikation. □

Also wird $Map(X,K)$ mit den oben genannten Operationen zu einem K-Vektorraum. QED

3

Lineare Algebra zum 11.05.2017 366511; 367129

Aufgabe 6 366511

Gegeben: Ein Körper K, ein K-Vektorraum V und K-Untervektorräume U_1 und U_2 von V.

(a) sei $U = U_1 \cap U_2 := \{ \lambda \in U \mid \lambda \in U_1 \wedge \lambda \in U_2 \}$

Seien $x, y \in U$ gegeben.

Annahme: U ist ein K-Untervektorraum von V.

Beweis: Mit Lemma 1.13 (b).

1. ~~Abgeschlossenheit unter~~ Existenz des ~~dem~~ Nullvektors (✓)
   $0 \in U_1 \wedge 0 \in U_2 \Leftrightarrow 0 \in U$, da U_1 und U_2 Untervektorräume. ✓ □

2. Abgeschlossenheit unter der Addition:
   $x, y \in U$
   $\Leftrightarrow x, y \in U_1 \wedge x, y \in U_2 \overset{\text{da } U_1, U_2 \text{ Untervektorräume}}{\Leftrightarrow} x+y \in U_1 \wedge x+y \in U_2$
   $\Leftrightarrow x+y \in U$ ✓ □

3. Abgeschlossenheit unter der Skalar. Multiplikation: −0,5
   $\forall k \in K : k \cdot x \in U_1 \wedge kx \in U_2$ (gilt da U_1, U_2 Untervektorräume)
   $\Leftrightarrow kx \in U$ ✓ □

Insgesamt gilt also mit Lemma 1.13 b), dass $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V ist. ✓

(b) Sei $U := U_1 \cup U_2 := \{ \lambda \in U \mid \lambda \in U_1 \vee \lambda \in U_2 \}$ ✓

Falls: $U_1 \neq U_2$: ~~An~~ Annahme: U ist kein Untervektorraum von V.

Wir widerlegen die Abgeschlossenheit unter der Addition (Lemma 1.13 (b)):

~~Seien $x, y \in U$. Angenommen U wäre bezüglich der Addition abgeschlossen dann müsste gelten:~~

Seien $x, y \in U$. Angenommen es gelte
$x \notin U_1 \wedge y \notin U_2 \wedge x \in U_2 \wedge y \in U_1$.

Dann würde gelten:

$x + y \in U$

$\Leftrightarrow x + y \in U_1 \vee x + y \in U_2$

$(y \in U_1)$ $(x+y) - y = x \in U_1$

Falls $x + y \in U_1 \Leftrightarrow (x - x) + y \in U_1$ ↯

$(x \in U_2)$ $(x+y) - x = y \in U_2$

Falls $x + y \in U_2 \Leftrightarrow x + (y - y) \in U_2$ ↯

$-0{,}5$

richtig gedacht aber leider falsch aufgeschrieben. :(

U ist also, falls $U_1 \neq U_2$ gilt, nicht unter der Addition abgeschlossen und somit in diesem Fall kein Untervektorraum von V. (✓)

■

Gegenbsp. fehlt! -1

Falls: $U_1 = U_2$ Dann gilt trivialerweise, dass U_1 und U_2 ~~sowie~~ Untervektorräume von V sind, dass auch $U_1 \cup U_2$ Untervektorraum von V ist. ✓ ■

(c) Sei $U := U_1 \setminus U_2 = \{\lambda \in U \mid \lambda \in U_1 \wedge \lambda \notin U_2\}$

Annahme: U ist kein Untervektorraum von V.

Beweis: U ist nicht ~~abge~~ abgeschlossen unter dem Nullvektor (Lemma 1.13(b)): ✓

Da U_2 Unterraumvektor gilt: $0 \in U_2$

$\Rightarrow 0 \notin U_1 \setminus U_2 = U$ ✓ Gegenbsp. fehlt $-0{,}5$

■

U ist also kein ~~Unterraumvekt~~ Untervektorraum. ✓

(d) Sei $U := U_1 \times U_2 = \{(x, y) \in U \mid x \in U_1, y \in U_2\}$.

Annahme: U ist ein Untervektorraum von V. f

1. Abgeschlossenheit unter dem Nullvektor:

Da $0 \in U_1 \wedge 0 \in U_2 \Rightarrow 0 \in U$ f ↯

2. Abgeschlossenheit unter der Addition:

Lineare Algebra 11.05.2017 366511; 367129

Beweis:

Seien $x, y \in U$.

$x + y \in U \Leftrightarrow (x_1+y_1, x_2+y_2) \in U$

$\Leftrightarrow x_1, y_1 \in U_1 \wedge x_2, y_2 \in U_2$

Dies gilt nach der Definition von U offensichtlich. $\square$

3. Abgeschlossenheit unter der Skalarmultiplikation:

Sei $x \in U$ und $k \in K$.

$k \cdot x \in U \Leftrightarrow k(x_1, x_2) \in U$

$\Leftrightarrow kx_1 \in U_1 \wedge kx_2 \in U_2$

Dies gilt nach der Def. von U offensichtlich. $\square$

Nach Definition ist insbesondere $U_1 \times U_2 \not\subseteq U$ und somit erst recht kein UVR von V.

Insgesammt ist mit Lemma 1.13(b) U also ein Untervektorraum von V. $\blacksquare$

-1

(e) Sei $U := U_1 + U_2 = \{x+y \mid x \in U_1 \wedge y \in U_2\}$

Annahme: U ist ein Untervektorraum von V.

Beweis: (Mit Lemma 1.13(b).)

1. ~~Abgeschlossenheit unter dem~~ Existenz des Nullvektors:

$0 = 0 + 0 \in U_1 + U_2$, da $0 \in U_1 \wedge 0 \in U_2$ $\square$

2. Abgeschlossenheit unter der Addition:

Seien $(x+y), (x'+y') \in U$.

Dann gilt: $(x+y) + (x'+y') = \underbrace{(x+x')}_{\in U_1} + \underbrace{(y+y')}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$

$\square$

3. Abgeschlossenheit unter der Skalarmultiplikation:

Sei $(x+y) \in U$ und $k \in K$.

Dann gilt: $k(x+y) = \underbrace{kx}_{\in U_1} + \underbrace{ky}_{\in U_2} \in U_1 + U_2 = U$

$\square$

Insgesamt gilt also, dass U ein Untervektorraum von V ist. $\blacksquare$

6,5

8