Formale Systeme Automaten und Prozesse

Abgabe 7
Abgabe: 19.06.2017

Georg C. Dorndorf Matr. Nr. 366511
Adrian C. Hinrichs Matr. Nr. 367129
Jan Bordihn Matr. Nr. 364705

# 19	# 20	# 21	Σ

Aufgabe 19

Sei die Grammatik G gegeben durch:

$$S \rightarrow \ ABC|\ a,\ A \rightarrow Sa,\ B \rightarrow Sb,\ C \rightarrow cS$$

1)

Wir überführen die Grammatik nun in die Chomsky Normalform (CNF) indem wir zunächst die ϵ-Produktionen entfernen.

Die Grammatik enthält keine ϵ-Produktionen. Wir fahren fort indem wir:

1. Neues Nonterminal R_a für jedes $a \in T$
2. Ersetze die Terminale a durch R_a für alle $a \in T$
3. Führe eine neue Regel $R_a \rightarrow a$ für jedes $a \in T$

Wir erhalten folgende Produktionsregeln

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABC \mid R_a \\ A &\rightarrow SR_a \\ B &\rightarrow SR_b \\ C &\rightarrow R_cS \\ R_b &\rightarrow b \\ R_a &\rightarrow a \\ R_c &\rightarrow c \end{aligned}$$

Nun müssen Produktionen der Form $A \rightarrow B_1B_2B_3\cdots B_k$ durch $A \rightarrow B_1B_{23\ldots k}$ rekursiv ersetzt werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AD_{BC} \\ S &\rightarrow R_a \\ D_{BC} &\rightarrow BC \\ A &\rightarrow SR_a \\ B &\rightarrow SR_b \\ C &\rightarrow R_cS \\ R_b &\rightarrow b \\ R_a &\rightarrow a \\ R_c &\rightarrow c \end{aligned}$$

Nun eliminieren wir die Kettenregeln

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AD_{BC} \mid a \\ D_{BC} &\rightarrow BC \\ A &\rightarrow SR_a \\ B &\rightarrow SR_b \\ C &\rightarrow R_cS \\ R_a &\rightarrow a \\ R_b &\rightarrow b \\ R_c &\rightarrow c \end{aligned}$$

Die obige Produktion ist nun in der Chomsky Normalform.

2)

Wir überführen die Produktionen nun weiter in die Greibach Normalform. Als erstes eliminieren wir verkleinernde Regeln.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AD_{BC} \mid a \\ D_{BC} &\rightarrow BC \\ A &\rightarrow SR_a \\ B &\rightarrow SR_b \\ C &\rightarrow R_cS \\ R_a &\rightarrow a \\ R_b &\rightarrow b \\ R_c &\rightarrow c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AD_{BC} \mid a \\ D_{BC} &\rightarrow BC \\ A &\rightarrow AD_{BC}R_a \mid aR_a \\ B &\rightarrow AD_{BC}R_b \mid aR_b \\ C &\rightarrow R_cS \\ R_a &\rightarrow a \\ R_b &\rightarrow b \\ R_c &\rightarrow c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\to AD_{BC} \mid a \\ D_{BC} &\to BC \\ A &\to ABCR_a \mid aR_a \\ B &\to ABCR_b \mid aR_b \\ C &\to R_cS \\ R_a &\to a \\ R_b &\to b \\ R_c &\to c \end{aligned}$$

Als nächstes beheben wir die Linksrekusion der Ableitung $A \to A\alpha$.

$$\begin{aligned} S &\to AD_{BC} \mid a \\ D_{BC} &\to BC \\ A &\to aR_a \mid aR_aZ_1 \\ B &\to ABCR_b \mid aR_b \\ C &\to R_cS \\ R_a &\to a \\ R_b &\to b \\ R_c &\to c \\ Z_1 &\to ABCR_a \mid ABCR_aZ_1 \end{aligned}$$

Nun Beheben wir die Ableitung $B \to A\alpha$.

$$\begin{aligned} S &\to AD_{BC} \mid a \\ D_{BC} &\to BC \\ A &\to aR_a \mid aR_aZ_1 \\ B &\to aR_aBCR_b \mid aR_aZ_1BCR_b \mid aR_b \\ C &\to R_cS \\ R_a &\to a \\ R_b &\to b \\ R_c &\to c \\ Z_1 &\to ABCR_a \mid ABCR_aZ_1 \end{aligned}$$

Als nächstes beheben wir die Regel $Z_1 \to A\alpha$.

$$\begin{aligned} S &\to AD_{BC} \mid a \\ D_{BC} &\to BC \\ A &\to aR_a \mid aR_aZ_1 \\ B &\to aR_aBCR_b \mid aR_aZ_1BCR_b \mid aR_b \\ C &\to R_cS \\ R_a &\to a \\ R_b &\to b \\ R_c &\to c \\ Z_1 &\to aR_aBCR_a \mid aR_aZ_1BCR_a \mid \\ & aR_aBCR_aZ_1 \mid aR_aZ_1BCR_aZ_1 \end{aligned}$$

Weiter wir die Regel $D_{BC} \to B\alpha$ behoben.

$$\begin{aligned} S &\to AD_{BC} \mid a \\ D_{BC} &\to aR_aBCR_bC \mid aR_aZ_1BCR_bC \mid aR_bC \\ A &\to aR_a \mid aR_aZ_1 \\ B &\to aR_aBCR_b \mid aR_aZ_1BCR_b \mid aR_b \\ C &\to R_cS \\ R_a &\to a \\ R_b &\to b \\ R_c &\to c \\ Z_1 &\to aR_aBCR_a \mid aR_aZ_1BCR_a \mid \\ & aR_aBCR_aZ_1 \mid aR_aZ_1BCR_aZ_1 \end{aligned}$$

Als nächsten Schritt beheben wir nun die Regeln $N \to N\alpha$, damit ist die Greibach Normalform vollständig umgeformt.

$$\begin{aligned} S &\to aR_aD_{BC} \mid aR_aZ_1D_{BC} \mid a \\ D_{BC} &\to aR_aBCR_bC \mid aR_aZ_1BCR_bC \mid aR_bC \\ A &\to aR_a \mid aR_aZ_1 \\ B &\to aR_aBCR_b \mid aR_aZ_1BCR_b \mid aR_b \\ C &\to cS \\ R_a &\to a \\ R_b &\to b \\ R_c &\to c \\ Z_1 &\to aR_aBCR_a \mid aR_aZ_1BCR_a \mid \\ & aR_aBCR_aZ_1 \mid aR_aZ_1BCR_aZ_1 \end{aligned}$$

Aufgabe 20

1)

Die Sprache $L_1 = \{a^{i_L}b^jc^k \mid i_L + j = k\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis per Widerspruch .

Anngenommen, dass L_1 kontextfrei sei. Dann gäbe es nach dem Pumping–Lemma für jede Zahl n und jedes Wort $z \in L_1$ mit $|z| > n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ so dass $|vwx| \le n \wedge |vx| \ge 0 \wedge uv^iwx^iy \in L\, \forall\, i \in \mathbb{N}_0$. Wähle $n = 1$. Nun ist entweder v aus $\{a, b, c\}$ und $w = \varepsilon$, oder w ist aus $\{a, b, c\}$ und $v = \varepsilon$. Dadurch ist genau einer der drei Wortteile (a^{i_L}, b^j, c^k) um mindestens 1 Symbol länger, so dass die Bedingung $i_L + j = k$ der Sprache nicht mehr erfüllt ist $\Rightarrow uv^iwx^iy \neq L_1\, \forall\, i > 1$ ↯.
Insgesammt gilt also das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen nicht für L_1, daher kann L_1 keine kontextfreie Sprache sein.

QED

2)

Die Sprache $L_2 = \{a^{i_L}b^jc^k \mid i_Lj = k\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis per Widerspruch .

Georg C. Dorndorf Matr. Nr. 366511
Adrian C. Hinrichs Matr. Nr. 367129
Jan Bordihn Matr. Nr. 364705

Anngenommen, dass L_2 kontextfrei sei. Dann gäbe es nach dem PUMPING–LEMMA für jede Zahl n und jedes Wort $z \in L_2$ mit $|z| > n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ so dass $|vwx| \leq n \land |vx| \geq 0 \land uv^iwx^iy \in L \,\forall\, i \in \mathbb{N}_0$. Wähle $n = 1$ Wir dürfen Œ annehmen, dass z tatsächlich alle Buchstaben aus $\{a, b, c\}$ mindestens einmal enthält. Nun ist entweder v aus $\{a, b, c\}$ und $w = \varepsilon$, oder w ist aus $\{a, b, c\}$ und $v = \varepsilon$. Dadurch ist genau einer der drei Wortteile (a^{i_L}, b^j, c^k) um mindestens 1 Symbol länger, so dass die Bedingung $i_L j = k$ der Sprache nicht mehr erfüllt ist $\Rightarrow uv^iwx^iy \neq L_2 \,\forall\, i > 1$ ↯.
Insgesammt gilt also das PUMPING LEMMA FÜR KONTEXTFREIE SPRACHEN nicht für L_1, daher kann L_1 keine kontextfreie Sprache sein.

QED

3)

Die Sprache $L_3 = \{pp \mid p \in \{a, b\}^*\}$ ist regulär, und somit kontextfrei, da sie sich durch den regulären Ausdruck $(a + b)^*(a + b)^* = (a + b)^*$ darstellen lässt.

□

4)

Die sprache $L_4 = \{pqp^R \mid |p| = |q|, p, q \in \{a, b\}^*\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis per Widerspruch .

Anngenommen, dass L_4 kontextfrei sei. Dann gäbe es nach dem PUMPING–LEMMA für jede Zahl n und jedes Wort $z \in L_4$ mit $|z| > n$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ so dass $|vwx| \leq n \land |vx| \geq 0 \land uv^iwx^iy \in L \,\forall\, i \in \mathbb{N}_0$. Wähle $n = |q| = |p|$. Nun ist entweder $|vwx|$ ein Teilwort von q, wodurch $uv^iwx^iy \,\forall\, i > 1$ nicht mehr in L wäre↯, oder wir können Œ annehmen, dass v mit dem Ende von p beginnt (Die einzige ander möglichkeit wäre dass x mit dem Anfang von p^R endet, was auf diesen Fall zurückführbar ist). Dann endet x irgendwo »in« q. Ergo ist $uv^iwx^iy \,\forall\, i > 1$ nicht mehr in L_3↯.

Insgesammt gilt also das PUMPING LEMMA FÜR KONTEXTFREIE SPRACHEN nicht für L_3, daher kann L_3 keine kontextfreie Sprache sein.

QED

Aufgabe 21