Datenstrukturen und Algorithmen

Abgabe 9
Abgabe: 05.07.2017

Georg C. Dorndorf Matr.Nr. 366511
Adrian C. Hinrichs Matr.Nr. 367129

# 6	# 7	# 8	# 9	# 10	Σ
4/4	3/3	3/3	1/4	3/3	14/17

es ist nicht grau unterlegt!

Die grau unterlegten Zellen markieren, an welcher Stelle für welchen Knoten die minimale Distanz sicher berechnet worden ist. nicht so einen M(exakten Satz verwenden

Aufgabe 6

Aktueller Knoten / Entfernung	A	B	C	D
-	0	∞	∞	∞
A		2	3	1
B				
C				
D		−2		
A				
B	−1			0
C				
D		−3		
A			2	
B	−2			−1
C				
D		−4		
A			1	
B	−3			−2
C				
D		−5		

Sei $V := \{A, B, C, D\}$ die Menge der Knoten des Graphen.

Der Algorithmus hat einen Zyklus mit negativem Gesamtgewicht gefunden, da nach der $|V| - 1$-ten Wiederholung immer noch Verbesserungen möglich waren.

1/4

Aufgabe 7

Knoten	A	B	C	G	E	F
B	2	-	-	-	-	-
C	6	6	-	-	-	-
D	∞	∞	13	13	13	13
E	∞	∞	8	8	-	-
F	∞	∞	12	12	10	-
G	7	7	7	-	-	-

Tabelle 1: Ergebnis des Dijkstra-Algorithmus in tabelarischer Form

Aufgabe 8

Sei der Graph G (Abb. 3) mit den Knoten $\{A, B, C\}$ gegeben durch:

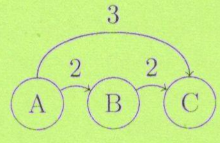

Abbildung 1: Graph G

Seien $s = A$ und $t = C$.

Der Dijkstra Algorithmus führt zu folgendem kürzestem Pfad vom s nach t gegeben durch den Baum B_1:

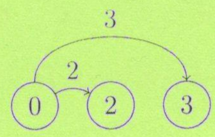

Abbildung 2: Baum B_1

Die Algorithmen von Prim/Kruskal erzeugen folgenden minimalen Spannbaum B_2 in G

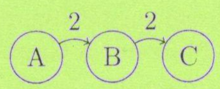

Abbildung 3: Baum B_2

Die Bäume B_1 und B_2 stimmen also offensichtlich nicht miteinander überein.

1/3

Aufgabe 9

Aufgabe 9.a

Sei E die Menge der Kanten des Graphens $G = (V, E, w)$, $\min(E) = x$ mit $x \in E$ und $w(x) = \min(w(E))$ die Kante mit dem geringsten Gewicht. Sei die Addition über Kanten als addition ihrer Gewichte definiert (das bedeutet die Kanten an sich werden nicht verändert, sondern nur die zugehörige Gewichtungsfunktion. Unter Missbrauch der Notation notieren wir diese Operation als Operation auf den Kanten.

Dies ist möglich, da w mit unserer Definition ein Isomirphismus ist). Nun ist

$$\varphi : E \to E, e \mapsto e - \min(E)$$

ein Isomorphismus bezüglich der »Verkettung« der Kanten, da nur ihre Gewichte geänder werden. φ verändert nicht das Ergebniss von Vergleichsoperationen über den Kantengewichten $(\forall e_1, e_2 \in E : w(e_1) \geq w(e_2) \Leftrightarrow e_1 \geq e_2)$.
Sei $\varphi(G)$ der Graph G mit der Menge der Kanten $\varphi(G)$.

Da φ (und somit auch die Inverse φ^{-1}) die Vergleichsoperationen in keiner Weise verändert, gilt:

$$\varphi(\text{Prim}(G)) = \text{Prim}(\varphi(G)) \quad \text{(I)}$$
$$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\varphi(\text{Prim}(G))) = \varphi^{-1}(\text{Prim}(\varphi(G))) \quad \text{(II)}$$
$$\Leftrightarrow \text{Prim}(G) = \varphi^{-1}(\text{Prim}(\varphi(G))) \quad \text{(III)}$$

da für alle Graphen G der Graph $\varphi(G)$ offensichtlich nur Positive Knoten enthält, ist der Algorithmus von Prim auch ohne anpassung auf Graphen mit beliebigem Kantengewicht anwendbar.

Da minimale Spannbäume stets eindeutig sind, gilt die Behauptung also für alle Algortihmen, die minimale Spannbäume generieren.

Sehr (zu) formal, aber siehe Hinweis
QED
in DSAL mit Isomorphismen anzukommen kann ich nicht empfehlen (in dieser Form)

Aufgabe 9.b

Nach Vorlesung gilt: (✓) ff

Lieber so unformal wie möglich und so formal wie nötig

$$\text{Prim}(G) = \{-5, -2, 6, -4, 7\}$$[1]

1/1

Aufgabe 10

Algorithmen, die den geforderten Baum liefern sind die von Prim und Kruskal zur Bestimmung des minimalen Spannbaums (MST) in einem Graphen.

Beweis: Gegeben sei der Graph $G = (V, E, w)$ mit $w : E \to \mathbb{Z}^+_{>0}$. Sei S ein Graph gegeben durch den MST in G. Sei x ein n-Tupel mit $n \in \mathbb{N}_0$. Sei x gegeben durch die Kantengewichte von S. Dann gilt nach Vorlesung: Es ist S ein Baum und es ist $\sum_{i\in[1,n]} x_i$ minimal. Sei nun $B = (V, E_B, f)$ ein Teilbaum so, dass $B \subset G$ und $|E_B| = n$ gilt. Sei ein weiteres n-Tupel y gegeben durch die Kantengewichte von B. Dann $\exists\, e \in f(E_B) : e > x_i \,\forall\, i \in [1, n]$. Daraus folgt, dass $\prod_{i\in[0,n]} y_i > \prod_{i\in[0,n]} x_i$ gilt. Insgesamt folgt nun, dass der durch einen MST-Algorithmus erzeugte Graph S auch Bezüglich des Produkts der Kantengewichte minimal ist. ✓

□

Die Algorithmen von Prim und Kruskal finden also auch den bezüglich der Multiplikation minimalen Spannbaum falls die Funktion der Kantengewichte die Form $g : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ hat. Nach Vorlesung ergibt sich demnach eine Laufzeitkomplexität von $O(|E| \log |V|)$.

□ ✓

QED

/3

[1]Unter missbrauch der Notation referenzieren wir hier die Kanten des Graphens G über ihr jeweiliges Gewicht. Diese Darstellung ist in diesem Fall eindeutig.

Abbildungen

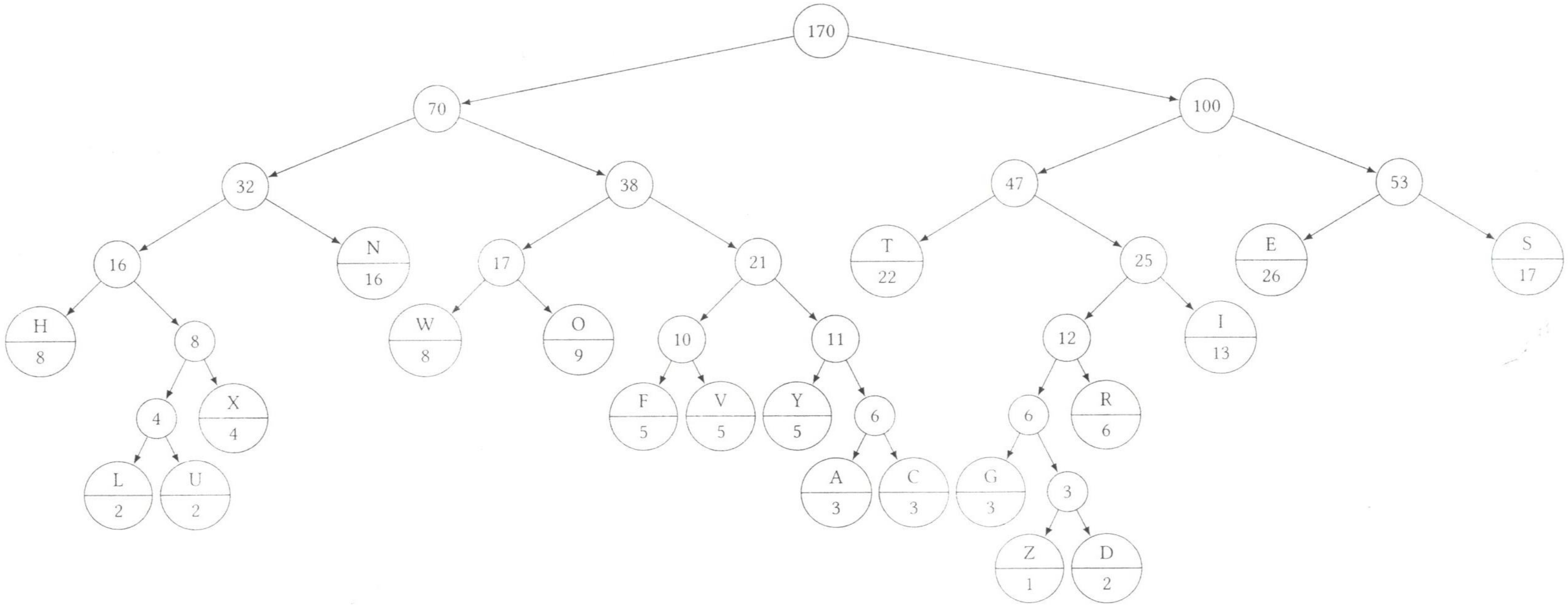

Abbildung 1: Baum zum HUFFMAN-CODE.