~~5/4~~ 4/4 | ~~5~~ 5,5/6 | 7 7/11 | ~~8~~ 2 | 7 | ~~23~~ 18,5/28

Datenstrukturen und Algorithmen

Abgabe: 17.05.2017

Georg C. Dorndorf Matr.Nr. 366511
Adrian C. Hinrichs Matr.Nr. 367129

Aufgabe 5

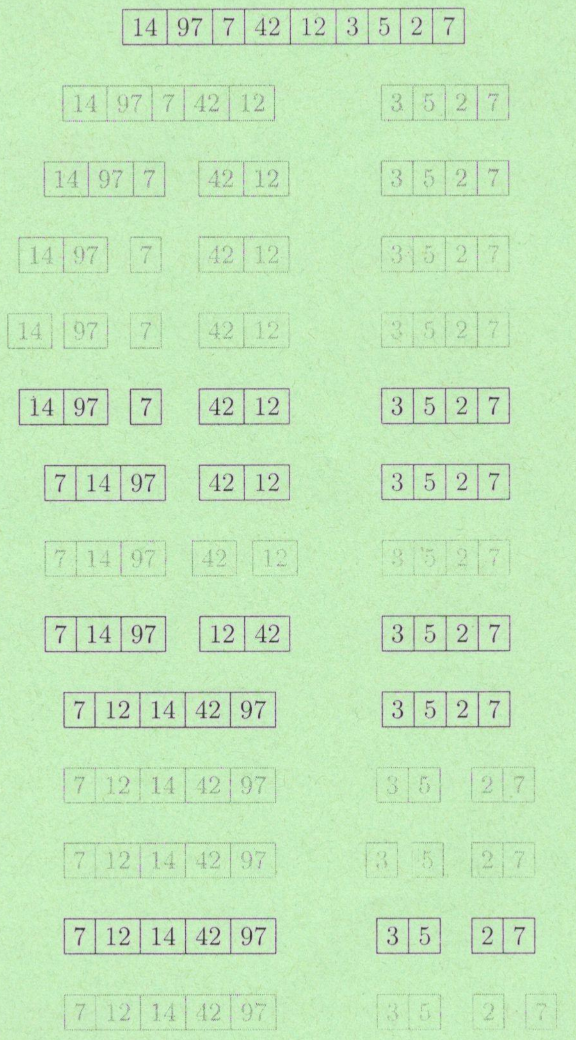


Abbildung 1: Visualisierung des Merge-Algorithmus (1/2)

1/4

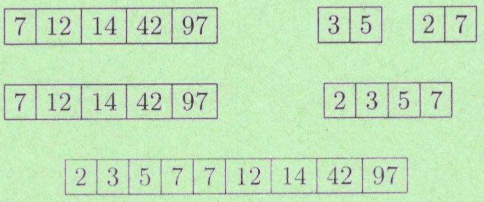
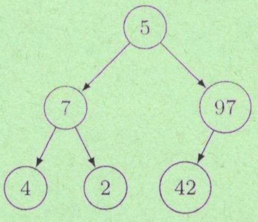
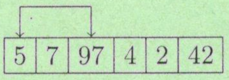


Abbildung 2: Visualisierung des Merge-Algorithmus (1/2)

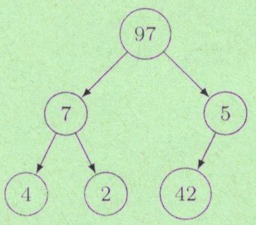
Die ausführung des Mergesort-Algorithmus ist in den Abbildungen 1 und 2 dargestellt. Die grauen Zeilen stellen das Produkt einer Split-Operation dar und dienen daher nur der veranschaulichung.

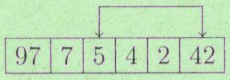
Aufgabe 6





(a) Heap vor dem Sortieren. (b) Heap-Array vor dem sortieren.

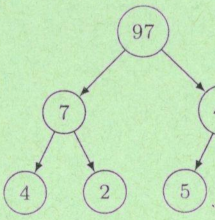




(c) Heap vor dem Sortieren. (d) Heap-Array vor dem sortieren.

Abbildung 3: Aufbau des Heaps

Georg C. Dorndorf Matr.Nr. 366511
Adrian C. Hinrichs Matr.Nr. 367129

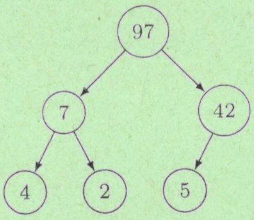


(a) Heap vor dem Sortieren.

97	7	42	4	2	5

(b) Heap-Array vor dem sortieren.

Abbildung 4: Fertig aufgebauter Heap

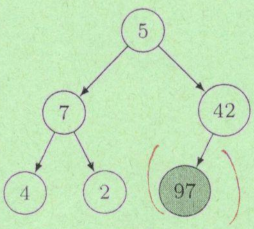


(a) Erste Iteration

97	7	42	4	2	5

(b) Erste Iteration

Abbildung 5: Sortiervorgang

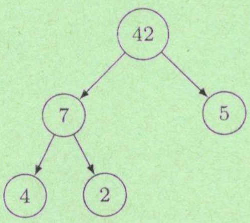


(a) Zweite Iteration

5	7	42	4	2	97

(b) Zweite Iteration

Abbildung 6: Sortiervorgang

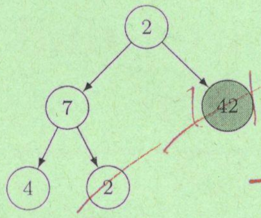


(a) Dritte Iteration

42	7	5	4	2	97

(b) Dritte Iteration

Abbildung 7: Sortiervorgang



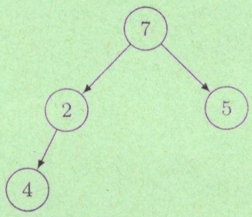
−0,5

(a) Vierte Iteration

2	7	5	4	42	97

(b) Vierte Iteration

Abbildung 8: Sortiervorgang

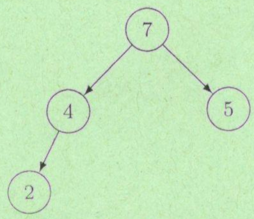


(a) Fünfte Iteration

7	2	5	4	42	97

(b) Fünfte Iteration

Abbildung 9: Sortiervorgang

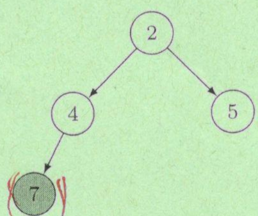


(a) Sechste Iteration

7	4	5	2	42	97

(b) Sechste Iteration

Abbildung 10: Sortiervorgang



(a) Siebte Iteration

2	4	5	7	42	97

(b) Siebte Iteration

Abbildung 11: Sortiervorgang

(a) Achte Iteration (b) Achte Iteration

Abbildung 12: Sortiervorgang

(a) Neunte Iteration (b) Neunte Iteration

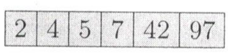
Abbildung 13: Sortiervorgang

(a) Zehnte Iteration (b) Zehnte Iteration

Abbildung 14: Sortiervorgang

(a) Elfte Iteration (b) Elfte Iteration

Abbildung 15: Sortiervorgang



(a) Fertig

Abbildung 16: Sortiervorgang

QEF

5,5

Aufgabe 7

a)

Es ergibt sich für Timmis Merge-Sort Algorithmus sowohl im Best- als auch im Worst- und Average-Case eine Komplexitätsrekursionsgleichung $T(n)$ von (I).

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = 1 \\ 3 \cdot T(\frac{n}{3}) + \Theta(n), & \text{, falls } n \neq 1 \end{cases} \tag{I}$$

Diese Rekursionslgeichung ergibt sich, da Merge-Sort ein Divide and Conquer Algorithmus ist. Timmis Variante von Merge-Sort teilt dabei jedes Problem in 3 Unterteile wobei wir vereinfachend annehmen, dass für n gilt $n = 3^m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Diese Annahme beeinflusst nicht die Größenordnung des Wachstums der Komplexität.

Es fallen also beim teilen des Problems 3 gleich große Teilpobleme an, die jeweils lediglich $\frac{n}{3}$ groß sind. Daraus ergibt sich für diese Operation eine Laufzeitkomplexität von $T(n) = 3 \cdot T(\frac{n}{3})$. Die Merge funktion wird jede Rekursionstiefe auf n Elemente angewandt dies ergibt sich aus der Annahme, dass `merge(int[] A, int l, int mid, int r)` nach Aufgabe $\Theta(r - l + 1)$ viele kostet also eine Komplexität von $T(n) = \Theta(n)$. Aus der Abbruchbedingung der Rekursion erhält man offensichtlich $T(1) = 1$. Insgesamt ehalten wir als Rekusionsgleichung für alle drei Fälle (I).

3 merges auf $\frac{2}{3}n$ Elementen, also $3 \cdot \Theta(\frac{2n}{3}) = \Theta(n)$

Es fällt auf, dass die Rekursionsgleichung leicht mittels des Master-Theorems einer Komplexitätsklasse zugeordnet werden kann. Es folgt also mithilfe des Master-Theorems:

$$T(n) = 3 \cdot T(\frac{n}{3}) + \Theta(n) \tag{II}$$

Wir definieren:

$b := 3;\ c := 3;\ f(n) := \cancel{n}\ \Theta(n)$; und   -0,5

$$E := \frac{\log 3}{\log 3} = 1 \tag{III}$$

Es fällt auf, dass $f(n) \in \Theta(n^E)$ gilt. Also gilt mit dem Master-Theorem (V);

$$T(n) \in \Theta(E \cdot \log n) \tag{IV}$$

$$\overset{E=n}{\Rightarrow} T(n) \in \Theta(n \cdot \log n) \tag{V}$$

QED

noch 2,5

b)

Ja der gegebene Algorithmus ist stabil, da lediglich Zahlen getauscht werden, die echt kleiner beziehungsweise echt größer sind.

... reicht nicht -1

z.B. 3 2' 2''
2'' 2' 3
falls nur diese Bed.

1

c)

Sei das zu sortierende Array modelliert als n-Tupel a mit $a_i, n, i \in \mathbb{N}$ Der triviale Fall wäre $n = 1$, für welchen offensichtlich gilt dass das Array sortiert ist. Nun beweisen wir Induktiv, dass der Algorithmus für alle $n \in \mathbb{N}$ korrekt sortiert. Vorraussetzung ist die Korrektheit der `merge()`-Funktion.

$$(IA): n = 1: \tag{VI}$$

ist trivialerweise sortiert. Der Algorithmus terminiert direkt. ■

$$n = 2: \tag{VII}$$

wird in der else-clause offensichtlich richtig sortiert, da nach ihrer Ausführung gilt:

$$a_1 \leq a_2 \tag{VIII}$$
$$\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} \text{ mit } i < n : a_i \leq a_{i+1} \tag{IX}$$

■

(IV) : Die Behauptung gelte nun für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

$$(IS): \ n \mapsto n+1 \tag{X}$$
$$\tag{XI}$$

Timmis MERGE-SORT teilt Arrays, die länger als 2 sind in zwei Teile. Daraus folgt folgender Induktionsschritt:

$$\forall i \in \mathbb{N} \text{ mit } i < n : a_i \leq a_{i+1} \tag{XII}$$

Seien l, r die Indizes auf, die Mergesort in der aktuellen Rekursionstiefe angewendet wird. Seien drei $\lceil \frac{n}{3} \rceil$-Tupel b, c, d und k wie folgt definiert:

$$k := \lceil \frac{n}{3} \rceil \tag{XIII}$$
$$b_i := a_i \qquad \forall i \in \mathbb{N} \text{ mit } i < k \tag{XIV}$$
$$c_i := a_i \qquad \forall i \in \mathbb{N} \text{ mit } l + k < i < 2k \tag{XV}$$
$$d_i := a_i \qquad \forall i \in \mathbb{N} \text{ mit } 2k < i < r \tag{XVI}$$

Dann gilt für das $n+1$-Tupel a: erst ~~merge(c,d)~~

$$a = \text{merge}(\text{merge}(\text{sort}(b), \text{sort}(c)), \text{sort}(d)) \tag{XVII}$$

Woher?

$$\text{mit } a'_i = a_i \forall i \leq n \text{ und } a''_1 = a_{n+1} \tag{XVIII}$$

nach Induktionsvorraussetzung werde b, c, d richtig sortiert. Nach Vorraussetzung verhält sich die merge-Funktion korrekt. Somit ist die Korrektheit Timmis MERGE-SORT Algorithmus mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

QED

-3 Erklären

die Korrektheit der einzelnen merges reicht nicht

/3

Aufgabe 8

a)

Zu zeigen: Ein heap mit n Knoten hat die Höhe $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

Beweis: Es ist bekannt, dass ein Heap ein Binärbaum ist. Für Binärbäume mit n Knoten gilt, dass die Höhe *mindestens* $\lceil \log_2(n+1) \rceil - 1$ ist. Die minimale Form eines Binärbaums ist erreicht, wenn alle Ebenen, bis auf die letzte komplett gefüllt sind, (was nach VL-07, Folie 5 eine Bedingung für einen Heap ist) ein Heap ist also ein minimaler binärer Baum. Zu zeigen: Die höhe eines minimalen binären Baums ist $\lfloor \log_2(n) \rfloor$

Fall 1: $\log_2(n+1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, so gilt: $\notin \mathbb{N}$

$$\lceil \log_2(n+1) \rceil - 1 = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor \tag{XIX}$$
$$\stackrel{\star}{=} \lfloor \log_2(n) \rfloor \tag{XX}$$

□

$\star$: $\log_2(n+1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ und $\log_2(n+1) - \log_2 n \in]0,1[\ \forall n \in \mathbb{N}$

Fall 2: $\log_2(n+1) \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\log_2(n+1) \in \mathbb{N} \text{ und } \log_2(n) \in \mathcal{O}(n) \tag{XXI}$$
$$\Rightarrow \exists \epsilon \in]0,1[: \log_2(n) + \epsilon = \log_2(n+1) \tag{XXII}$$
$$\Rightarrow \lceil \log_2(n+1) \rceil - 1 \stackrel{\substack{\log_2(n+1) \in \mathbb{N} \\ 0 < \epsilon < 1}}{=} \lceil \log_2(n+1) - \epsilon \rceil - 1 \tag{XXIII}$$
$$\stackrel{(XXII)}{=} \lceil (\log_2(n) + \epsilon) - \epsilon \rceil - 1 \tag{XXIV}$$
$$= \lceil \log_2(n) \rceil - 1 \tag{XXV}$$
$$\stackrel{\log_2 n \notin \mathbb{N}}{=} \lfloor \log_2 n \rfloor \tag{XXVI}$$

gleiches ε? Σ? -1

merge(sort(c), sort(d))

□

Es wurde also gezeigt, das die höhe eines minimalen binären Baums, und somit auch die eines Heaps genau $\lfloor \log_2(n) \rfloor$ ist.

QED /2

b)

Zu zeigen: Ein Heap hat maximal $\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil$ Knoten mit der Höhe h.

Beweis: Betrachten wir einen beliebigen Heap. Sei die Höhe des Heaps (aslo die Anzahl der Ebenen) als H gegeben, die Anzahl der Knoten als n.
Die maximale Anzahl an Knoten, die e Kanten von der Wurzel entfernt sind, beläuft sich nun auf 2^e (nach Vorlesung)

Fall 1: $H = 1 \Leftrightarrow n = 1$
Die behauptung gilt Trivialerweise.

□

Fall 2: $H > 1 \Leftrightarrow n > 1$
Es gilt für die höhe jedes Knotens: $h = (H - 1) - e$ (die Wurzel befindet sich auf Ebene 1).
Sei N die maximale anzahl an Knoten eines Heaps der höhe H.
Die maximale Anzahl der Knoten der höhe h ist also:

$$2^{(H-1)-h} = 2^{H-(h+1)} \tag{XXVII}$$
$$= \frac{2^H}{2^{h+1}} \tag{XXVIII}$$
$$= \frac{2^H}{2^{h+1}} \tag{XXIX}$$
$$\overset{*}{=} \frac{N+1}{2^{h+1}} \tag{XXX}$$
$$\overset{**}{=} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil \tag{XXXI}$$
$$\tag{XXXII}$$

*:

$$8\text{a} \Rightarrow H = \lfloor \log_2(N+1) \rfloor$$

da $h \in \mathbb{N}$ folgt $\log_2(N+1) \in \mathbb{N}$, also:

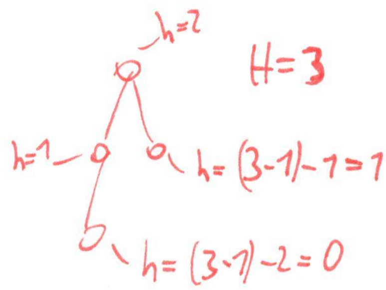
$$= \log_2(N+1)$$
$$\Leftrightarrow 2^H = 2^{\log_2(N+1)}$$
$$= N + 1$$

■

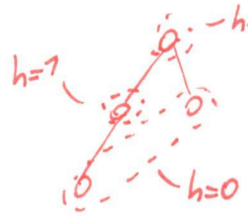
** : Das tatsächliche n muss offensichtlich im Intervall $2^{H-1} < n \geq 2^H - 1 = N$ liegen, da ansonsten nicht genügend Knoten im Heap enthalten wären, um H ebene zu besitzen. Des weiteren ist n somit immer größer als 2^{h+1} ■

Die behauptung ist also Bewiesen

QED



allerdings nach gegebener Def.



Wenn ihr trotzdem meint, dass das stimmt, erklärt es mir nach dem Tutorium für mögliche Punkte.

0