Datenstrukturen und Algorithmen

Abgabe: 10.05.2017

Georg C. Dorndorf Matr.Nr. 366511
Adrian C. Hinrichs Matr.Nr. 367129

Aufgabe 5

Aufgabe 5.a

Ausgehend von der Annahme, dass die Laufzeit jeder elementaren Vergleichsoperation $\{>, <, \leq, \geq, =\} \in \Theta(1)$ liegt, ist die Rekursionsgleichung $T(n, m)$ der laufzeit des Algorithmus:

$$T(n,m) = \begin{cases} 2, \text{ falls } n = 0 \\ T(n-1,m) + 2, \text{ falls } n > 0 \\ T(n+1,m) + 3, \text{ falls } n < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 5.b

$$T(n,m) = \begin{cases} 1, \text{ falls } n <= m \\ T(n-m,m) + 1, \text{ falls } n > m \end{cases}$$

Aufgabe 6

Aufgabe 6.a

Sei eine Funktion f mit $f(n) = 27n^{\sqrt{3}}$ gegeben. Es fällt auf, dass (mindestens) ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(n) \in O(n^{\log_8 64 - \varepsilon}) = O(n^{2-\varepsilon})$ gilt.

Beweis: Sei $\varepsilon = 0.1$ — nun gilt $\sqrt{3} \approx 1.73205 < 1.9 = 2 - \varepsilon$.
Ergo gilt für jedes $c \geq 27$, dass $27n^{\sqrt{3}}$ asymptotisch schneller wächst als $c \cdot n^{1.9} = c \cdot n^{\log_8 64 - \varepsilon}$, da

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(n)}{c \cdot n^{\log_8 64-\varepsilon}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{27 \cdot n^{\sqrt{3}}}{c \cdot n^{1.9}} && \text{(I)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{27}{c \cdot n^{1.9-\sqrt{3}}} && \text{(II)} \\ &= 0 \forall c > 27, \text{ da } n^{1.9-\sqrt{3}} > 1 \forall n > 1 && \text{(III)} \end{aligned}$$

□

Mit dem Master-Theorem folgt, dass $T(n) \in \Theta(n^{\log_8 64})$

QED

Aufgabe 6.b

Sei eine funktion f mit $f(n) = \frac{n^3+2n}{4}$ gegeben. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} f(n) &\in \Theta(\frac{n^3}{4} + \frac{2n}{4}) && \text{(IV)} \\ &= \Theta(n^3 + 2n) && \text{(V)} \\ &= \Theta(n^3) && \text{(VI)} \\ &= \Theta(n^{\log_2 8}) && \text{(VII)} \end{aligned}$$

Mithilfe des Master-Theorems folgt nun, dass für T mit $T(n) = 8 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n^3+2n}{4}$ gilt:

$$\begin{aligned} T(n) &\in \Theta(n^{log_2 8} \cdot \log n) && \text{(VIII)} \\ &= \Theta(n^3 \cdot \log n) && \text{(IX)} \end{aligned}$$

QED

Aufgabe 6.c

$$\begin{aligned} T(n) &= 10 \cdot T\left(\frac{n}{10}\right) + 6 \cdot n \cdot \log_2(n) && \text{(X)} \\ &\text{Also gilt mit dem Master-Theorem:} && \text{(XI)} \\ b &= 10;\ c = 10;\ f(n) = 6 \cdot n \cdot \log_2(n) \text{ und} && \text{(XII)} \\ E &= \frac{\log 10}{\log 10} = 1 && \text{(XIII)} \end{aligned}$$

Behauptung: Das Master-Theorem ist nicht anwendbar.
Beweis: Fall M1 ist nicht anwendbar:

$$\begin{aligned} &f(n) \notin \mathcal{O}(n^{1-\varepsilon}), \text{ da} && \text{(XIV)} \\ &\limsup_{n\to\infty} f(n)/n^{1-\varepsilon} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \cdot \log_2 n}{n^{1-\varepsilon}} = \infty && \text{(XV)} \end{aligned}$$

Fall M2 ist ebenfalls nicht anwendbar:

$$f(n) \notin \Theta(n^1) \quad \text{(XVI)}$$

Fall M3 ist auch nicht anwendbar:

$$\begin{aligned} &f(n) \notin \Omega(n^{n+\varepsilon}), \text{ da} && \text{(XVII)} \\ &\liminf_{n\to\infty} f(n)/n^{\varepsilon} = \liminf_{n\to\infty} \frac{n \cdot \log_2 n}{n^{\varepsilon}} = 0 && \text{(XVIII)} \\ & && \text{(XIX)} \end{aligned}$$

Insgesamt ist also das Master-Theorem nicht anwendbar.

QED

Aufgabe 6.d

$$T(n) = 27 \cdot T(\frac{n}{10}) + n^2 + n^{\sqrt{2}} \tag{XX}$$

Wir definieren:

$$b := 27;\ c := 10;\ f(n) := n^2 + n^{\sqrt{2}};\ \text{und}$$
$$E := \frac{\log 27}{\log 10} \approx 1.4314 \tag{XXI}$$

Es fällt auf, dass $f(n) \in \Omega(n^{E+\varepsilon})$ für bestimmte ε erfüllt ist:

$$f(n) \in \Omega(n^{E+\varepsilon}) \tag{XXII}$$
$$\Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} \frac{n^2 + n^{\sqrt{2}}}{n^{E+\varepsilon}} > 0, \text{ dies gilt } \forall \varepsilon > 0 : E + \varepsilon \leq 2 \tag{XXIII}$$

Also muss $\varepsilon \in]0, 2 - E]$. Nun muss gelten: $b \cdot f\left(n\frac{n}{c}\right) \leq d \cdot f(n)$

$$b \cdot f\left(\frac{n}{c}\right) \leq d \cdot f(n) \tag{XXIV}$$
$$\Leftrightarrow 27 \cdot f\left(\frac{n}{10}\right) \leq d \cdot f(n) \tag{XXV}$$
$$\Leftrightarrow 27 \cdot \left(\frac{n}{10}^2 + (\frac{n}{10})^{\sqrt{2}}\right) \leq d \cdot \left(n^2 + n^{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{Sei } d = 27: \tag{XXVI}$$
$$\Leftrightarrow 27 \cdot \left(\frac{n}{10}^2 + (\frac{n}{10})^{\sqrt{2}}\right) \leq 27 \cdot \left(n^2 + n^{\sqrt{2}}\right) \tag{XXVII}$$
$$\overset{27>0}{\Longleftrightarrow} \left(\frac{n}{10}^2 + (\frac{n}{10})^{\sqrt{2}}\right) \leq \left(n^2 + n^{\sqrt{2}}\right) \tag{XXVIII}$$

Wobei (XXVIII) offensichtlich für alle $n > 0$ gilt.

Mit dem Master-Theorem folg nun

$$T(n) \in \Theta\left(n^E \cdot \log n\right) \tag{XXIX}$$
$$= \Theta\left(n^{\frac{\log 27}{\log 10}} \cdot \log n\right) \tag{XXX}$$

QED

Aufgabe 7

Aufgabe 7.a

Zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} \tag{XXXI}$$

Beweis:

$$(IA) : n = 1 \tag{XXXII}$$
$$\sum_{i}^{n} \frac{1}{i(i+1} = \frac{1}{1+1} \tag{XXXIII}$$
$$= \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{n}{n+1} \qquad \square \tag{XXXIV}$$
$$(IV) : \text{Dies gelte für ein beliebieges, aber festes } n \in \mathbb{N} \tag{XXXV}$$
$$(IS) : n = n + 1 \tag{XXXVI}$$
$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} \tag{XXXVII}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{n+1(n+1+1)} \tag{XXXVIII}$$
$$\overset{(V)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1(n+2)} \tag{XXXIX}$$
$$= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{XL}$$
$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \tag{XLI}$$
$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+1)} \tag{XLII}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \tag{XLIII}$$
$$= \frac{n+1}{n+2} \tag{XLIV}$$

Mithilfe von vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ ist die obige Aussage bewiesen.

QED

Aufgabe 7.b

Durch scharfes hinsehen ergibt sich folgende **These**: Die geschlossene Form für R lautet: $R(n) = c \cdot n$.

Beweis:

(IA):

$$n = 0 : \tag{XLV}$$
$$R(n) = 0 = n \tag{XLVI}$$
$$n = 1 : \tag{XLVII}$$
$$R(n) = \frac{2}{1} \cdot R(0) + c = \frac{2}{1} \cdot 0 + c \tag{XLVIII}$$
$$= c \tag{XLIX}$$
$$= n \cdot c \tag{L}$$

(IV): Gelte die These für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$. Durch die funktionsweise der vollständingen Induktion können wir Œ annehmen, dass die These auch für alle $m < n$ gilt.
(IS):

$$(n \mapsto n+1): \tag{LI}$$

$$R(n+1) = \frac{2}{n+1}\left(\sum_{i\in[0,n]} R(i)\right) + c \tag{LII}$$

$$\overset{(IV)}{=} \frac{2}{n+1}\left(\sum_{i\in[0,n]} c \cdot i\right) + c \tag{LIII}$$

$$= \frac{2}{n+1}\left(c \cdot \sum_{i\in[0,n]} i\right) + c \tag{LIV}$$

$$\overset{\star}{=} \frac{2 \cdot c}{n+1} \cdot \frac{(n+1)\cdot n}{2} + c \tag{LV}$$

$$= c \cdot n + c \tag{LVI}$$

$$= c \cdot (n+1) \tag{LVII}$$

$\star$ Markiert die Anwendung der Gaussschen Summenformel.

QED