Datenstrukturen und Algorithmen

Abgabe 10
Abgabe: 12.07.2017

Georg C. Dorndorf Matr.Nr. 366511
Adrian C. Hinrichs Matr.Nr. 367129

# 4	# 5	# 6	# 7	Σ

Aufgabe 4

Aufgabe 4.a

	A	B	C	D	E
A	0	5	∞	∞	4
B	7	0	3	∞	2
C	∞	4	0	∞	2
D	1	∞	∞	0	2
E	∞	1	97	∞	0

Tabelle 1: Adjazenzmatrix nach Bildung der reflexiven Hülle

	A	B	C	D	E
A	0	5	∞	∞	4
B	7	0	3	∞	2
C	∞	4	0	∞	2
D	1	6	∞	0	2
E	∞	1	97	∞	0

Tabelle 2: Adjazenzmatrix nach dem ersten Schleifendurchlauf ($k = 0$)

	A	B	C	D	E
A	0	5	7	∞	4
B	7	0	3	∞	2
C	11	4	0	∞	2
D	1	6	4	0	2
E	8	1	4	∞	0

Tabelle 3: Adjazenzmatrix nach dem zweiten Schleifendurchlauf ($k = 1$)

	A	B	C	D	E
A	0	5	7	∞	4
B	7	0	3	∞	2
C	11	4	0	∞	2
D	1	6	4	0	2
E	8	1	4	∞	0

Tabelle 4: Adjazenzmatrix nach dem dritten Schleifendurchlauf ($k = 2$)

	A	B	C	D	E
A	0	5	7	∞	4
B	7	0	3	∞	2
C	11	4	0	∞	2
D	1	6	4	0	2
E	8	1	4	∞	0

Tabelle 5: Adjazenzmatrix nach dem vierten Schleifendurchlauf ($k = 3$)

	A	B	C	D	E
A	0	5	7	∞	4
B	7	0	3	∞	2
C	10	3	0	∞	2
D	1	3	4	0	2
E	8	1	4	∞	0

Tabelle 6: Adjazenzmatrix nach dem fünften Schleifendurchlauf ($k = 4$). Dies ist das finale Ergebnis des ALGORITHMUS VON FLOYD-WARSHALL. Sei diese Matrix ab sofort A_F

Aufgabe 5

Aufgabe 5.a

Nach Vorlesung liefert der ALGORITHMUS VON WARSHALL eine Transitive Hülle zu jedem Graph. Da der ALGORTIHMUS VON FLOYD-WARSHALL eine Erweiterung auf Kantengewichte des Ersteren darstellt, ist die transitive Hülle der Kantenrelation E gegeben durch die Adjazenzmatrix $\left(1 - \delta_{\infty, F_{i,j}}\right)_{i,j \in [0,n[}$ [1]. Es ist

$$\left(1 - \delta_{\infty, F_{i,j}}\right)_{i,j \in [0,n[} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1] Offensichtlich ist diese Matrix unter Missbrauch der Notation als Familie dargestellt.

Aufgabe 5.b

Unter Anwendung des ALGORITHMUS VON WARSHALL ist die transitive Hülle R^* von R gegeben durch:

$$R^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Um eine Relation R' mit minimaler Kardinalität zu erzeugen, so dass R^* die Transitive Hülle von R' ist, werden zunächst alle reflexiven Transitionen entfernt und anschließend alle bis auf die unterste 1 jeder Spalte durch eine 0 ersetzt:

$$R \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R'$$

Durch den ALGORITHMUS VON WARSHALL ist die transitive Hülle von R' wieder R^*

Aufgabe 6

Aufgabe 6.a

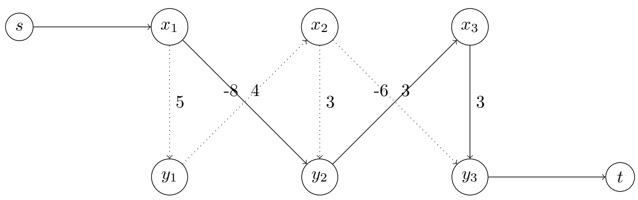


Abbildung 1: Der Hilfsgraph nach der 3. Iteration

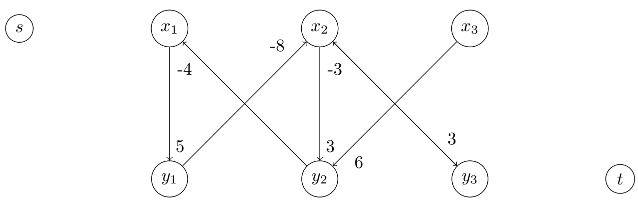


Abbildung 2: Der Hilfsgraph nach der 4. Iteration

Aufgabe 6.b

Sei die Funktion der Kantengewichte w gegeben durch

$$w(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, \text{ für } i = j \text{ und } i < 50 \\ -1, \text{ sonst} \end{cases}$$

. Dann gilt für die Menge des maximalen Matchings offensichtlich $|M| = 50$.

Aufgabe 6.c

Es existiert keine Konstruktion, die die Anforderung erfüllt.

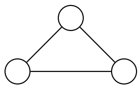
Beweis: Sei

$$w(x_i, y_j) > 0 \,\forall\, x_i, y_j$$

Für den vorliegenden Graphen gilt die Bedingung von Hall offensichtlich, da alle Elemente der Partitionen miteinander verbunden sind. Daraus folgt mit dem Satz von Hall, dass der Graph ein perfektes Matching hat. Angenommen während des Algorithmus gilt zu einem Zeitpunkt $|M| = 50$ dann folgt jedoch aus: M hat ein perfektes Matching und $w(x_i, y_j) > 0$, dass ein M-augmentierender Pfad existiert.

Aufgabe 6.d

Sei ein Graph G gegeben durch



Es ist offensichtlich $\tau(G) = 2$ und $\nu(G) = 1$. Es folgt

$$\tau(G) = 2 = 2 \cdot 1 \geq (2 - 0) \cdot \nu(G) \tag{I}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt offensichtlich stets

$$\tau(G) \overset{I}{\geq} 2 \geq (2 - \varepsilon)\nu(G)$$

Es existiert also für jedes $\varepsilon > 0$ ein Graph G, der die geforderten Eigenschaften erfüllt.

QED

Aufgabe 7

Angenommen an einer Kreuzung k treffen sich $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geq 2$ Straßen. Folgende Modellierung führt in Zusammenhang mit einem matching Algorithmus für bipartite Graphen zu einem möglichst optimalen Ergebniss für die Bananenhändler aus Bananenland.

Seien die Händler an den Kreuzungen als Knoten H eines Graphen $G := \{V, E\}$ mit $H \subset V$ modelliert[2]. Seien die Wasserstraßen durch ihre Mitten als Knoten $S \subset V$ des Graphen G modelliert. Es sei des weiteren $V = H \,\dot\cup\, S$. Sei E gegeben durch die Wege aller Händler aller Kreuzungen k zu deren, an sie angrenzenden, nächsten n_k Straßenmitten sowie durch die Wege der Händler zu allen Straßenmitten, der Nachbarskreuzungen. Es sei M die Menge der Matches, die durch einen geeigneten Algorithmus für maximales Matching ermittelt wurde.

So kann jeder Händler nur den an seine Kreuzeung angrenzenden Straßen zugeteilt werden und nach Vorlesung(VL) gilt, dass die durch den Algorithmus gefundenen Matches M optimal sind. Die Laufzeitkomplexität dieses Algorithmus ist nach VL aus $O(|V| \cdot |E|)$.

Nach dem Satz von Hall für Bipartite Graphen gilt folgendes: Den Bananenverkäufern gelingt ihr Vorhaben genau dann, wenn für alle $\mathfrak{S} \subseteq H$ gilt: $|N(\mathfrak{S})| \geq |\mathfrak{S}|$ [3]. Eine genauere Aussage ist hier schwer zu treffen ohne weitreichende Annahmen über die Beschaffenheit des Flussnetzes von Bananenland zu treffen[4].

[2] Dies ist so zu verstehen, dass jeder Händler einen eigenen Knoten erhält.

[3] $N(\mathfrak{K})$:=Menge aller Nachbarn der Knoten $v \in \mathfrak{K}$.

[4] All this is driving me bananas.